

## Densidad espectral en guías de onda mediante propiedades estadísticas y teorema de Wiener-Khintchine

### Spectral density in waveguides using statistical properties and Wiener Khintchine theorem

LÓPEZ-ÁLVAREZ, Yadira Fabiola†\*, JARA-RUÍZ, Ricardo, RODRÍGUEZ-FRANCO, Martín Eduardo y DELGADO-GUERRERO, Sergio Humberto

*Universidad Tecnológica del Norte de Aguascalientes, Aguascalientes, Estación Rincón, Rincón de Romos, Aguascalientes, 20400 México.*

*Universidad de Guadalajara, Lagos de Moreno, Jalisco, 47460, México.*

ID 1<sup>er</sup> Autor: *Yadira Fabiola, López-Álvarez* / ORC ID: 0000-0002-9041-1908, Researcher ID Thomson: T-1555-2018, CVU CONACYT ID: 375952.

ID 1<sup>er</sup> Coautor: *Ricardo, Jara-Ruiz* / ORC ID: 0000-0001-7725-4138, Researcher ID Thomson: T-1532-2018, CVU CONACYT ID: 630276.

ID 2<sup>do</sup> Coautor: *Martín Eduardo, Rodríguez-Franco* / ORC ID: 0000-0002-6804-4777, Researcher ID Thomson: T-1539-2018, CVU CONACYT ID: 660892

ID 3<sup>er</sup> Coautor: *Sergio, Delgado-Guerrero* / ORC ID: 0000-0003-2521-5887, Researcher ID Thomson: V-1747-2018, CVU CONACYT ID: 240475

DOI: 10.35429/JOIE.2020.13.4.6.11

Recibido Enero 14, 2020; Aceptado Marzo 30, 2020

#### Resumen

Números son los casos en los que el uso de la fibra óptica puede ser utilizada, sus propiedades por encima de muchos cables mecánicos la hacen una guía de onda por excelencia, además, ha propiciado el desarrollo de las comunicaciones, la ingeniería, incluso las ciencias médicas y biológicas; sin embargo, este medio de transmisión puede ser afectado por mal acoplamiento o cortes. Cuando el camino óptico dentro de la guía de onda sufre alteraciones, se presentan pérdidas, superposición en la señal, errores en la demodulación y decodificación, limitando su capacidad de transmisión. En este trabajo se reportan los resultados en los cambios que presenta la densidad espectral en una guía de onda circular, cuando es sometida a deformaciones en los ejes (x, y), mediante la perspectiva de la generación de patrones de speckle y sus propiedades estadísticas, en correlación con el Teorema de Wiener – Khintchine (WKT). Los resultados obtenidos sugieren que el comportamiento de la densidad espectral es de manera descendente, también, que es factible determinar la similitud entre la densidad espectral de referencia y la que sufre deformación tanto para el análisis estadístico como para el Teorema de Wiener – Khintchine.

**Guías de onda, Propiedades estadísticas, Teorema de Wiener Khintchine**

#### Abstract

There are several cases in which the use of optical fiber is use, its properties above many mechanical cables makes it an excellent waveguide, it has led to the development of communications, engineering, including the medical and biological science. However, poor coupling or cuts can affect this means of transmission. When the optical path within the waveguide undergoes alterations, there are losses, overlap in the signal, errors in demodulation and decoding, limiting its transmission capacity. In this work the result in the changes that the spectral density presents in a circular waveguide are reported, when subjected to deformations in the axes (x, y), through the perspective of speckle pattern, and its statistical properties in correlation with the Wiener Khintchine Theorem. The results obtained suggest that the behavior of the spectral density is descending and that it is feasible to determine the similarity between the reference spectral density and the one that undergoes deformation for both the statistical analysis and the Wiener Khintchine Theorem.

**Waveguides, Statistical properties, Wiener Khintchine Theorem**

**Citación:** LÓPEZ-ÁLVAREZ, Yadira Fabiola, JARA-RUÍZ, Ricardo, RODRÍGUEZ-FRANCO, Martín Eduardo y DELGADO-GUERRERO, Sergio Humberto. Densidad espectral en guías de onda mediante propiedades estadísticas y teorema de Wiener-Khintchine. Revista de Ingeniería Innovativa. 2020. 4-13:6-11.

\*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: yadira.lopez@utna.edu.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

Ya que un campo electromagnético está descrito en función de los vectores de campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{H}$  y para que exista propagación de la luz en un medio se requiere que cada una de las componentes satisfagan la ecuación de onda y posteriormente las ecuaciones de Maxwell.

Una condición necesaria para que el campo eléctrico  $E(r, t)$  y magnético  $H(r, t)$  satisfagan la ecuación de onda, en términos de frecuencia, es necesario que dicha ecuación sea reducida a la ecuación de Helmholtz, Eq. (1), para dar resultado a un patrón de campo electromagnético transversal a la dirección de propagación, donde a cada uno de estos patrones se les denomina modo, éste puede ser definido como la solución de la ecuación de onda que satisfacen las condiciones de frontera, donde su distribución espacial no cambia con la propagación, su solución está dada en función de la Eq. (2), donde  $\beta$  corresponde a la constante de propagación del modo (Ramos, 2001).

$$\nabla^2 \cdot E(r, t) + k^2 n^2 E(r, t) = 0 \quad (1)$$

$$Z = e^{i\beta z} \quad (2)$$

Cuando se hace incidir una luz coherente dentro del cono de aceptación de una fibra óptica, los modos de propagación producidos en ella y que se encuentran dentro del núcleo se ven afectados por los cambios ambientales que se producen sobre la guía, resultando en cambios del patrón de speckle al final de la fibra, dicho patrón es monitoreado al superponer la intensidad de la luz que atraviesa en camino óptico de la guía sobre una superficie ópticamente rugosa, donde el detector puesto a la salida de la fibra no detectará cambios en la intensidad de dicho patrón. La aproximación mencionada es aplicada directamente a fibras de baja coherencia en las que la potencia es detectada, independientemente de las condiciones ambientales (Freund, 2008).

La intensidad a la salida del difusor puede ser representado mediante la Eq. (3), donde  $I_T$  representa la intensidad total,  $I_i$  es la intensidad en cada punto del patrón de intensidad y  $N$  representa el número de puntos del patrón.

$$I_T = \sum_{i=1}^N I_i \quad (3)$$

Si se considera la propagación de la onda electromagnética a través de una unidad de área, las contribuciones del patrón de intensidad "speckle", pueden ser descritos en función del producto vectorial del campo eléctrico y magnético, Eq. (4), descritos mediante las funciones de Bessel y representado mediante la Eq. (5) (Lujó, 2008).

$$I_T = \frac{1}{2} \text{Re}[E \times H * \hat{z}] \quad (4)$$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N A_m B_{nm}(U_m, R) A_l B_{nl}(U_l, R) \cos(n_m \theta) \cos(n_l \theta) \exp[-i(\Delta\beta_{ml} z - \Delta\phi_{ml})] \quad (5)$$

Donde  $\Delta\beta_{ml} z$  y  $\Delta\phi_{ml}$  representan las diferencias entre las constantes de propagación y la fase entre los modos  $ml$  (Spillman, 1989).

Si a la guía de onda se le induce una deformación  $\Delta\theta(t)$  presentará una diferencia en el camino óptico que sigue el haz de luz dentro del medio, la cual podrá ser representada como una correlación entre los cambios de los modos de propagación con la deformación inducida, pudiendo ser representada en términos de la constante de propagación, afectando directamente a la fase de la intensidad de la salida de la fibra óptica y la distribución de los patrones de speckle que generan los modos (Gutierrez, 2018).

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N [A_m^2 B_{nm}^2(U_m, R) \cos^2(n_m \theta) + 2 \sum_{m=1}^N A_m A_{m-1} B_{nm}(U_m, R) B_{n,m-1}(U_{m-1}, R) \cos(n_m \theta) \cos(\Delta\beta_{m,m-1} z - \Delta\phi_{m,m-1} + \Delta\theta(t))] \quad (6)$$

Si se considera que la perturbación es muy pequeña, la Eq. (6), puede ser reescrita:

$$I_i = A_i \{1 + B_i [\cos \delta_i + F(t) \phi_i \sin \delta_i]\} \quad (7)$$

$F(t) \phi_i$ , representa la perturbación, que se propaga por una guía de onda, de longitud  $L$ , dado por:

$$\phi = \beta L \quad (8)$$

Donde  $\beta$  es la constante de propagación,  $n$  es el índice de refracción de la fibra y  $\lambda$  la longitud de onda, al variar físicamente el camino de propagación del haz de luz dentro de la fibra óptica mediante un estímulo externo la fase óptica variará de la forma:

$$\Delta\phi = \beta \Delta L + \Delta\beta L \quad (9)$$

### Análisis estadístico para patrones de speckle proyectados en una superficie

El patrón de speckle puede ser estudiado desde la perspectiva de la estadística mediante el análisis de la función de la densidad de probabilidad obtenida de la intensidad de un punto y la de segundo orden que analiza la densidad espectral de la luz, y que a su vez esta puede ser estudiada como la función de autocorrelación (Massaki,1986), debido a que los cambios de intensidad por perturbaciones se presentan en el orden del tamaño del speckle, es necesario el uso de técnicas de correlación para la cuantificación del promedio de la intensidad, para este caso uno de los métodos algebraicos sería mediante el coeficiente de correlación dado por (Gutierrez, 2018):

$$C = \frac{\sum_i \sum_j ((I_{ref(i,j)} - I_{ref}) \cdot (I_n(i,j) - \langle I_n \rangle))}{\sqrt{\sum_i \sum_j (I_{ref(i,j)} - \langle I_{ref} \rangle)^2 (\sum_i \sum_j (I_n(i,j) - \langle I_n \rangle)^2)}} \quad (10)$$

Sin embargo, el análisis de la densidad espectral no solo puede ser estudiado desde la teoría de la probabilidad estándar, sino que también está directamente relacionada con el Teorema de Wiener – Khintchine (WKT), según lo expone Cohen *et al*, (Cohen, 1998); sugiriendo que la razón principal de realizar un análisis en un dominio diferente al de la señal de estudio es la visión que se puede obtener de dicha señal, o simplemente que la señal muestra un comportamiento distinto en el tiempo.

Tomando la función de autocorrelación  $A(t)$ , para  $I(t)$ .

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\tau) I(t + \tau) d\tau \quad (11)$$

Usando la transformada de Fourier de  $I(t)$ .

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I_v e^{-2\pi/v\tau} dv \quad (12)$$

$$\bar{I}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}_v e^{-2\pi/v\tau} dv$$

Aplicando la función de autocorrelación para  $\bar{I}_v(\tau)$  y  $I_v(t + \tau)$ .

$$A(t) = F_v[|E_v|^2](t) \quad (13)$$

Entonces, convirtiendo la correlación entre patrones de speckle en una técnica para determinar la variación y los cambios estructurales en dichos patrones, para el caso de la aplicación del WKT se toman dos imágenes una de referencia y otra con los cambios en el patrón, donde la deformación entre las dos superficies es calculada mediante la correlación cruzada usando la Transformada rápida de Fourier (FFT), mediante la Eq. (14).

$$c(i, j) = F^{-1}(H_{s1}^* H_{s2}) \quad (14)$$

Donde  $H_{s1}$  y  $H_{s2}$ , denotan las transformadas de Fourier de la subimagen de los patrones obtenidos, \* indica el complejo conjugado de la subimagen de referencia y  $F^{-1}$ , la Transformada Inversa de Fourier.

### Motivación para la investigación

Debido a las exigencias en el desarrollo de las comunicaciones, el análisis de los cambios en la intensidad a la salida de una guía de onda, da pauta para estudiar los cambios generados debido a perturbaciones en el medio de transmisión, así como implementar métodos de análisis eficientes, y que se contribuya al desarrollo de una mejorada transmisión de datos.

### Contribución de la investigación

Se determina a partir de métodos estadísticos y se correlaciona con la Transformada rápida de Fourier, el análisis de los cambios que sufre la intensidad en la transmisión de los datos a través de las guías de onda, cuando es sometida a deformaciones. El análisis se hace a partir de la distribución de patrones de speckle sobre una superficie rugosa. Se obtienen los cambios en intensidad realizando un análisis de correlación de técnicas.

### Desarrollo

Para el análisis de los cambios de intensidad en las guías de onda, se crearon en el software Matlab, dos patrones de speckle a partir de la Eq. (6), uno se utilizó como referencia y al otro se le aplicó una deformación en los ejes ( $x, y$ ). Los dos patrones de speckle son correlacionados para determinar la similitud y/o diferencias originadas por la diferencia de fase en cada uno.

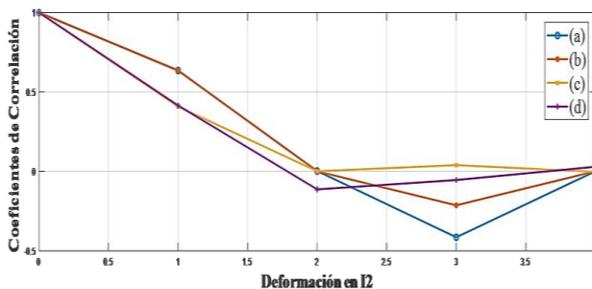
Las deformaciones inducidas se realizaron con intervalos de  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ , según lo muestra la Tabla 1.

**Resultados**

La Tabla 1, muestra la deformación inducida en el patrón de speckle, la densidad espectral entre el patrón de referencia y el que es afectado por la deformación inducida, así como los coeficientes de correlación, usando Eq. (9).

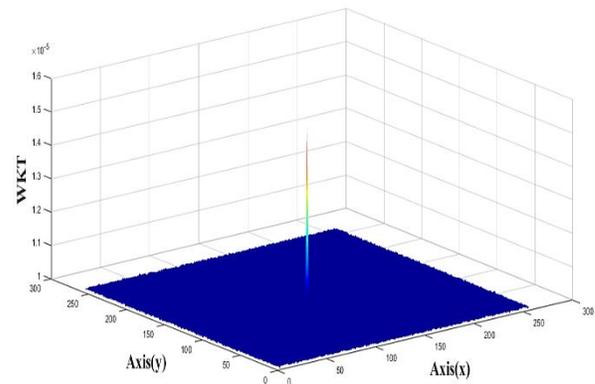
Deformación en I2	Densidad espectral entre I1- I2, usando WKT normalizada	Coefficiente de Correlación
$\Delta\varphi = 0$	1	1
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}x$	0.8774	0.6356
$\Delta\varphi = \pi x$	0.663171691	0.0025
$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}x$	0.005898427	-0.2141
$\Delta\varphi = 2\pi x$	0.663171691	0.0008619
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}y$	0.877457405	0.6353
$\Delta\varphi = \pi y$	0.663171691	0.00074382
$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}y$	0.005910223	-0.2130
$\Delta\varphi = 2\pi y$	0.668414155	-0.00088050
$\Delta\varphi = (x + y)$	0.803407602	0.7077
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}(x + y)$	0.659239843	0.4083
$\Delta\varphi = \pi(x + y)$	0.664482307	0.0011
$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}(x + y)$	0.678899083	0.0398
$\Delta\varphi = 2\pi(x + y)$	0.665137615	-0.0025
$\Delta\varphi = (x^2 + y^2)$	0.906946265	0.7226
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)$	0.803407602	0.4150
$\Delta\varphi = \pi(x^2 + y^2)$	0.006258847	-0.1130
$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}(x^2 + y^2)$	0.005952359	-0.0540
$\Delta\varphi = 2\pi(x^2 + y^2)$	0.673656619	0.0294

**Tabla 1** Deformación aplicada en I2, densidad espectral usando WKT y coeficientes de correlación  
Fuente: elaboración propia

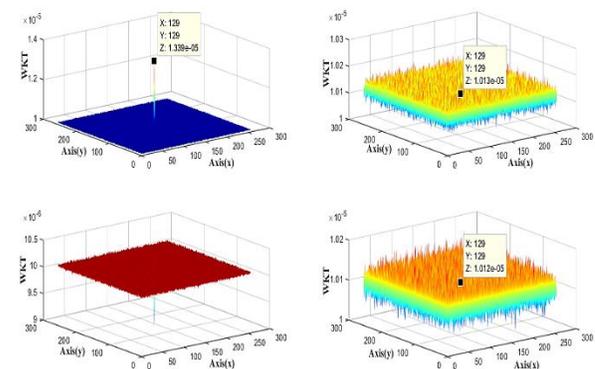


**Gráfico 1** Comportamiento de los coeficientes de correlación, (a)Deformación en x, (b)Deformación en y, (c)Deformación en (x,y), (d)Deformación en  $(x^2 + y^2)$ , con intervalos de  $\frac{\pi}{2}$   
Fuente: elaboración propia [Matlab]

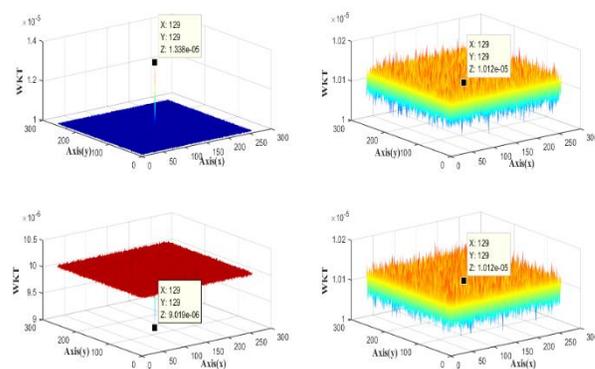
El Gráfico 1, muestra el comportamiento de los coeficientes de correlación, se tomo como referencia I<sub>1</sub>, a I<sub>2</sub>, se le aplicó la deformación aplicando Eq. (9). Los resultados muestran un comportamiento descendente, donde  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}x, y$  y  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}(x + y), (x^2 + y^2)$ , presentan intersección, para el caso de  $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}x, \Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}y$ , presenta la mayor diferencia entre la refencia y la inducida.



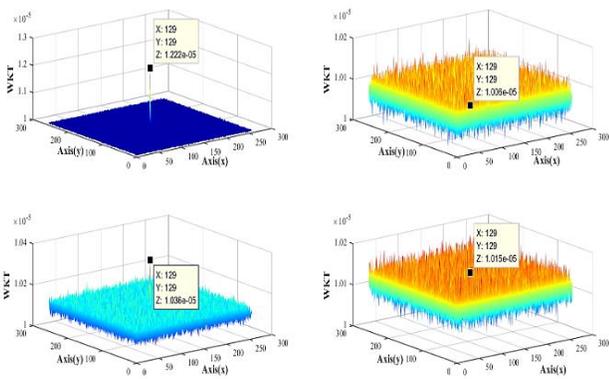
**Gráfico 2** Comportamiento de densidad espectral usando WKT  
Fuente: elaboración propia [Matlab]



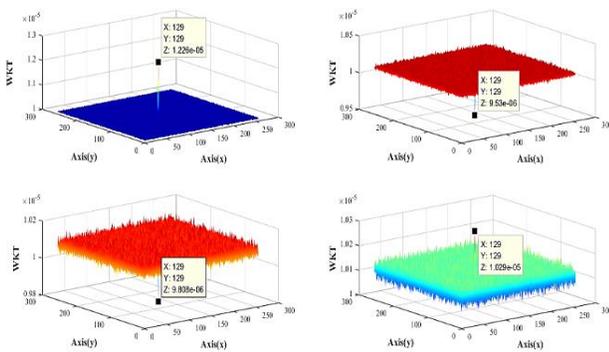
**Gráfico 3** Comportamiento de densidad espectral usando WKT, con deformación en x  
Fuente: elaboración propia [Matlab]



**Gráfico 4** Comportamiento de densidad espectral usando WKT, con deformación en y  
Fuente: elaboración propia [Matlab]



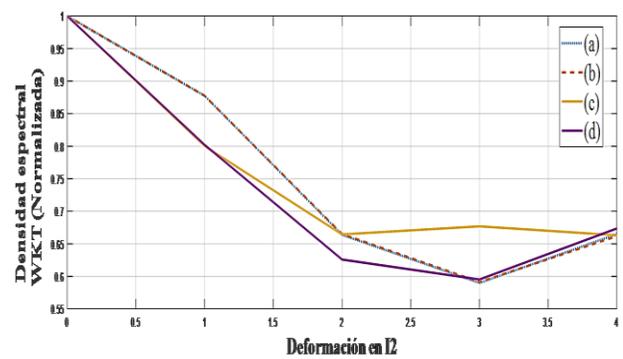
**Gráfico 5** Comportamiento de densidad espectral usando WKT, con deformación en  $x+y$   
Fuente: elaboración propia [Matlab]



**Gráfico 6** Comportamiento de densidad espectral usando WKT, con deformación en  $(x^2 + y^2)$   
Fuente: elaboración propia [Matlab]

El Gráfico 2, muestra el comportamiento utilizando WKT, este es tomado como la referencia de la densidad espectral, ya ésta no presenta deformación del medio difusor.

Los Gráficos 3, 4, 5 y 6, muestran el comportamiento de la densidad espectral calculada mediante WKT, cuando se tiene una deformación en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $(x+y)$  y  $(x^2 + y^2)$ , respectivamente, los puntos en los que no se presentan pico máximo, el valor es visualizado de acuerdo a la localización del pixel con coordenadas en  $(x, y)$ , a medida que la deformación afecta al medio difusor, la densidad espectral muestra un corrimiento a las bajas energías, según lo muestra la Tabla 1. Donde el valor para  $\pi$  y  $2\pi$  tienen una similitud en su intensidad, esto para  $x$ ,  $y$ ,  $(x+y)$ , situación que no se presenta para  $(x^2 + y^2)$ . Se muestra también, una disminución en su densidad espectral alrededor de las 0.2 y 0.66 (u.a.), según lo muestra el Gráfico 7.



**Gráfico 7** Comportamiento de densidad espectral usando WKT, (a)Deformación en  $x$ , (b)Deformación en  $y$ , (c)Deformación en  $(x,y)$ , (d)Deformación en  $(x^2 + y^2)$   
Fuente: elaboración propia [Matlab]

Para el caso de la correlación entre la intensidad de referencia con la deformada utilizando WKT (mediante transformada de Fourier), muestra también, comportamiento descendente, con una intersección en las deformaciones  $(x+y)$ .

**Conclusión**

Se presenta el comportamiento estadístico de los patrones de speckle (intensidad), el cual se puede aproximar a la propagación de la luz dentro de una guía de onda circular, se utiliza el Teorema de Winner-Khintchine, para describir la distribución de la intensidad espectral. Se compara el comportamiento de los coeficientes con los puntos máximos de la distribución de intensidad, obteniendo un comportamiento descendente, mostrando puntos de intersección entre estos dos métodos, también, se puede mencionar que ambos métodos dan la información necesaria para determinar si se está limitando la capacidad de trasmisión de datos, en base a los cambios en intensidad y su distribución espectral, ya que es factible realizar una aproximación entre la correlación cruzada y el Teorema de Wiener Khintchine.

**Referencias**

Cohen L. (1998). The generalization of the Wiener-Khinchin theorem. Proceedings of the 1998 *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP '98* (Cat. No.98CH36181), Seattle, WA, USA, (3) 1577-1580.

Freund, I. Joseph W. Goodman, (2008). Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. *J Stat Phys*, 130 413–414.

LÓPEZ-ÁLVAREZ, Yadira Fabiola, JARA-RUÍZ, Ricardo, RODRÍGUEZ-FRANCO, Martín Eduardo y DELGADO-GUERRERO, Sergio Humberto. Densidad espectral en guías de onda mediante propiedades estadísticas y teorema de Wiener-Khintchine. *Revista de Ingeniería Innovativa*. 2020

Gutierrez L., et al., (2018). Specklegramas de fibra óptica analizados mediante procesamiento digital de imágenes, *Rev. Acad. Colomb. Cienc.Ex. Fis. Nat.* 42(163):182-188.

Lujo Ivan, Klokoc Pavo, Komljenovic Tin, Bosliljevac Marko, Sipus, (2008). Fiber Optic Vibration Sensor Based on Multimode Fiber. *Radioengineering*, 17(2) 93-97.

Massaki Imai, (1986). Statical properties of optical Fiber Speckle, *Bulletin or Faculty of Engineering, Hokkaido University*, 130:89-104.

Ramos A. Luis y Maní-Panameño E, (2001). Cálculo de los modos electromagnéticos en una fibra óptica mediante soporte computacional analítico, *REVISTA MEXICANA DE FÍSICA* 47 (4) 386-391.

Spillman W.B., B.R. Kliner, L.B. Maurice, and P.L. Fuhn, (1989). Statistical model sensor for fiber optic vibration sensing uses. *Applied Optics*, 28(15).