

Método de Euler-Lagrange en el modelado y control de un péndulo invertido sobre un carro

RAMÍREZ-GONZÁLEZ, Luis^{1†}, GARCÍA-MARTÍNEZ, José², SIORDIA-VÁSQUEZ y Xóchitl¹, GARCIA-RAMOS, Roman¹

¹Universidad Veracruzana Facultad de Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones, Prolongación de la Av. Venustiano Carranza s/n, Poza Rica, Veracruz

²Universidad Autónoma de Querétaro, Cerro de Las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, 76010 Santiago de Querétaro

Recibido 2 de Junio, 2017; Aceptado 8 de Septiembre, 2017

Resumen

Un problema clásico de la teoría de control es el péndulo invertido sobre un carro, donde están conectadas dos masas en movimiento. Este tipo de sistema mecánico es difícil de controlar debido a su inherente inestabilidad y con un comportamiento altamente no lineal. El objetivo de este artículo es obtener un modelo matemático derivando las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema péndulo invertido usando el método de Euler-Lagrange y una representación en espacio de estados para el diseño del controlador. El controlador se valida implementando un diagrama de la planta y el controlador en MATLAB/Simulink. Los resultados demuestran que el método empleado en el diseño del controlador logra el objetivo de control. Este trabajo aporta una metodología que puede ser adaptada y servir como base, en el modelado y diseño de control de otros sistemas no lineales.

Péndulo invertido, espacio de estado, controlador lineal

Abstract

A classic problem of control theory is the inverted pendulum on a cart, where two masses in motion are connected. This type of mechanical system is difficult to control because of its inherent instability and with highly non-linear behavior. The objective of this paper is to obtain a mathematical model by deriving the equations governing the dynamics of the inverted pendulum system using the Euler-Lagrange method and a state space representation for the controller design. The controller is validated by implementing a plant diagram and controller in MATLAB/Simulink. The results demonstrate that the method used in the controller design achieves the control objective. This work provides a methodology that can be adapted and serve as a basis in the modeling and control design of other nonlinear systems.

Inverted pendulum, state space, linear controller

Citación: RAMÍREZ-GONZÁLEZ, Luis, GARCÍA-MARTÍNEZ, José, SIORDIA-VÁSQUEZ, Xóchitl y GARCIA-RAMOS, Roman. Euler-Lagrange en el modelado y control de un péndulo invertido sobre un carro. Revista de Ingeniería Eléctrica. 2017. 1-3:1-8.

† Investigador contribuyendo como primer autor.

*Correspondencia al Autor Correo Electrónico: dramirez@uv.mx

Introducción

El sistema péndulo invertido sobre un carro (SPISC) es un sistema dinámico inherentemente inestable con un comportamiento altamente no lineal y por su semejanza a otros problemas de la ingeniería de control como son los controladores de brazos robóticos, lanzadores de cohetes espaciales, controladores de vehículos aéreos para despegue y aterrizaje vertical por mencionar algunos, es considerado como uno de los problemas clásicos más importantes en la teoría de control, siendo de gran interés en su investigación al ser utilizado como un banco de pruebas para la evaluación de una amplia gama de métodos y estrategias de control lineal y no lineal.

El SPISC como el que se muestra en la figura 1, (Mahbubeh Moghaddas, 2012), es un tipo de sistema mecánico subactuado, el cuál tiene un número menor de entradas de control que grados de libertad y consiste de una varilla rígida cilíndrica o plana sin masa de longitud l con una bola de masa m al extremo del péndulo, con libertad de rotar 360° sobre su propio eje, la cual se encuentra montada sobre un carro de masa M que se mueve libremente sobre la dirección x , (García, 2016).

El carro y la bola se consideran como dos masas puntuales. En general, el problema de control consiste en obtener un modelo matemático del SPISC y utilizar el modelo para determinar la ley de control con el objetivo de mantener al péndulo en la posición vertical deseada en todo momento (Vijayanand Kurdekar, 2013).

El desarrollo de la metodología se centra en derivar el modelo matemático, usando el método de Euler-Lagrange, el cual permite crear las ecuaciones de movimiento para un conjunto de puntos de masa, introduciendo las llamadas coordenadas generalizadas y desarrollar un controlador por el método de espacio de estados para lograr estabilizar el péndulo sobre la vertical que se desplaza en una trayectoria lineal. (Ogata K., 2004), (García, 2016)

Este artículo está organizado de la siguiente manera: la sección 1, introduce al péndulo invertido como un problema clásico de la teoría de control mencionando algunas aplicaciones de este problema, la sección 2, aborda el desarrollo del modelo matemático a través de la derivación de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del SPISC basado en el método del Euler-Lagrange, la sección 3 presenta una representación en el espacio de estado y la linealización del SPISC, en la sección 4, se aborda el diseño del controlador usando el método de asignación de polos, en la sección 5 se presenta la simulación usando la herramienta computacional MATLAB/Simulink y los resultados, finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

Modelado matemático

El sistema péndulo invertido sobre un carro (SPISC), se considera como un robot articulado de 2 grados de libertad, cuya primera articulación es traslacional, mientras que la segunda, es rotacional. Las ecuaciones de Euler-Lagrange representan al sistema por un conjunto de coordenadas generalizadas, cada coordenada por cada grado de libertad independiente del sistema, incluyendo totalmente las limitaciones propias del sistema. Las ecuaciones que modelan al sistema se obtienen usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

Donde q_i representa la posición (angular ó lineal) correspondiente a cada elemento móvil del sistema, \dot{q}_i es la velocidad correspondiente, y Q_i representa las fuerzas generalizadas, aplicadas a cada elemento (fuerzas y torques) al sistema.

La energía cinética $T(q_i, \dot{q}_i)$ se expresa en términos de estas coordenadas y sus derivadas, mientras que la energía potencial $V(q_i)$ se expresa en términos de las coordenadas generalizadas. La función Lagrangiana se expresa por la siguiente ecuación como:

$$L = T(q_1, q_2, \dots, q_r, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2)$$

En relación a la geometría del SPISC de la figura 1, se define la posición del centro de masa del péndulo con las ecuaciones (3) y (4).

$$x_p = x + l \sin \theta \quad (3)$$

$$y_p = l \cos \theta \quad (4)$$

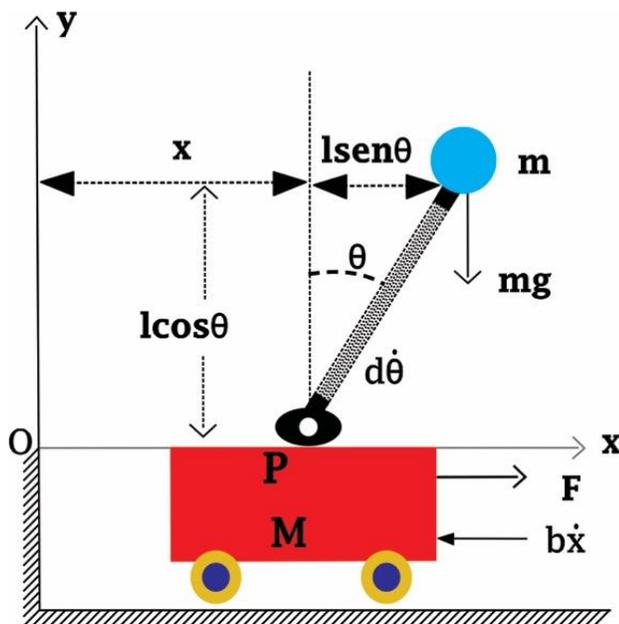


Figura 1 Sistema péndulo invertido sobre un carro (SPISC)

La tabla 1 presenta una breve descripción de los parámetros del SPISC mostrados en la figura 1 y son utilizados en la obtención del modelo matemático, (García, 2016). Las expresiones de la energía cinética y potencial del péndulo son obtenidas definiendo las coordenadas generalizadas. Para la coordenada generalizada $q_1 = x$.

Símbolo	Parámetro	Valor
M	Masa del carro	2 Kg
m	Masa del péndulo	0.2 Kg
l	Longitud del péndulo	0.6 m
b	Fricción del carro	0.1 N/m/ s
d	Fricción del péndulo	nula
g	gravedad	9.81 m/s ²
F	Fuerza aplicada al carro	N
P	Pivote montado en el carro	-
x	Coordenada de la posición del carro	-
θ	Ángulo del péndulo desde vertical	-

Tabla 1 Parámetros del sistema péndulo invertido

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b\dot{x} \quad (5)$$

Y para la coordenada generalizada $q_2 = \theta$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = d\dot{\theta} \quad (6)$$

La energía cinética total del sistema esta expresada por la siguiente ecuación:

$$T = T_c + T_p \quad (7)$$

Siendo T_c la energía cinética del carro y T_p la energía potencial del péndulo, entonces se tiene:

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (8)$$

$$T_p = \frac{1}{2} m v_p^2 \quad (9)$$

Donde v_p es la componente total de la velocidad del péndulo, y las componentes en x e y de la velocidad del péndulo son v_{xp} y v_{yp} respectivamente, expresadas como:

$$v_p^2 = v_{xp}^2 + v_{yp}^2 \quad (10)$$

Sustituyendo la ecuación (10) en (9).

$$T_p = \frac{1}{2}m(v_{xp}^2 + v_{yp}^2) \quad (11)$$

La posición del centro de masa del péndulo esta definida por las ecuaciones (3) y (4) y relacionándolas con la ecuación (11) se obtiene la ecuación (12).

$$T_p = \frac{1}{2}m \left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\sin\theta)^2 \right] \quad (12)$$

Desarrollando la ecuación (12) y reduciendo términos se obtiene la energía cinética total del péndulo:

$$T_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8) y (13) en la ecuación (7) y arreglando términos se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (14)$$

La energía potencial del péndulo queda expresada como:

$$V_p = mgl\cos\theta \quad (15)$$

Y la energía potencial del carro se expresa:

$$V_c = 0 \quad (16)$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema queda expresada:

$$V = V_c + V_p = V_p \quad (17)$$

Relacionando las ecuaciones (14) y (17) con la ecuación (2), se obtiene el Lagrangiano del sistema representado por la ecuación (18).

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad (18)$$

Considerando ahora, la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange y las coordenadas generalizadas $q_1 = x$ y $q_2 = \theta$, para los dos casos siguientes, se aplican las ecuaciones (5) y (6) a la ecuación (18). En el caso 1, la coordenada generalizada $q_1 = x$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \right) \right] = F - b\dot{x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

Aplicando las derivadas a la ecuación anterior se obtiene

$$(M + m)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + ml\cos\theta\ddot{\theta} + b\dot{x} = F \quad (21)$$

En el caso 2, la coordenada generalizada $q_2 = \theta$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} (ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - d\dot{\theta} = 0 \quad (22)$$

Aplicando las derivadas a la ecuación anterior y simplificando términos se obtiene:

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta + d\dot{\theta} = 0 \quad (23)$$

Las ecuaciones (21) y (23) son las ecuaciones que definen el movimiento del SPISC y representan el modelo matemático no lineal y se expresan en forma matricial en la ecuación (24):

$$\begin{bmatrix} (M + m) & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + ml\dot{\theta}^2\sin\theta - b\dot{x} \\ mgl\sin\theta - d\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Representación en el espacio de estados

A partir de las ecuaciones del modelo matemático no lineal del SPISC, representadas por las ecuaciones (21) y (23), se manipulan algebraicamente de modo que, de la ecuación (21) se obtiene la ecuación (25):

$$\ddot{x} = -\frac{ml\dot{\theta}\sin\theta}{(M+m)} - \frac{ml\cos\theta}{(M+m)}\ddot{\theta} - \frac{b}{(M+m)}\dot{x} + \frac{1}{(M+m)}F \quad (25)$$

Para estabilizar al péndulo en la vertical superior, es necesario mantener al ángulo θ pequeño, entonces es posible justificar la aproximación $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, y $\theta\dot{\theta}$ es despreciable, entonces es posible linealizar el sistema SPISC cerca de su posición de equilibrio, (Dorf R., 2011) las cuales son dos, $(x, \theta) = (0, 0)$ el péndulo está en la posición de arriba y $(x, \theta) = (0, \pi)$ el péndulo está posicionado abajo.

La ecuación (25) puede ser expresada en forma lineal como sigue:

$$\ddot{x} = -\frac{ml}{(M+m)}\ddot{\theta} - \frac{b}{(M+m)}\dot{x} + \frac{1}{(M+m)}F \quad (26)$$

Aplicando las condiciones de equilibrio a la ecuación (23) se obtiene la ecuación (27).

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} - g\theta = 0 \quad (27)$$

Sustituyendo la ecuación (26) en la ecuación (27), se obtiene la ecuación (28):

$$l\ddot{\theta} + \left(-\frac{ml}{(M+m)}\ddot{\theta} - \frac{b}{(M+m)}\dot{x} + \frac{1}{(M+m)}F\right) - g\theta = 0 \quad (28)$$

y resolviendo para $\ddot{\theta}$ se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{b}{Ml}\dot{x} + \frac{(M+m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}F \quad (29)$$

La función de transferencia del péndulo invertido se obtiene aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (29) obteniéndose (30).

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = -\frac{1/Ml}{s^2 - \frac{(M+m)g}{Ml}} \quad (30)$$

Las variables de estado son: la posición del carro x , el ángulo de la varilla del péndulo con respecto a la vertical θ , la velocidad del carro \dot{x} y la velocidad angular de la varilla del péndulo $\dot{\theta}$. Definiendo las variables de estado y usando las ecuaciones (26) y (29) del modelo matemático lineal se tiene:

$$x_1 = x; x_2 = \dot{x}; x_3 = \theta; x_4 = \dot{\theta} \quad (31)$$

La representación en el espacio de estados del modelo del SPISC está dada por las ecuaciones (32) y (33).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (32)$$

La ecuación de salida

$$y = Cx + Du \quad (33)$$

Siendo A, B, C y D matrices.

La ecuación de estado del SPISC es expresada en la ecuación (34) como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{(M+m)} & 0 & -\frac{ml}{(M+m)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (34)$$

La ecuación de salida del sistema se expresa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Siendo u la entrada del sistema que es igual a la fuerza F aplicada, y D la matriz de transmitancia del sistema la cual tiene un valor 0. Usando, los parámetros de la Tabla 1, del SPISC, en la ecuación de estado se obtienen los valores numéricos de las matrices A y B , por lo que la ecuación de estado (34) queda ahora expresada por la ecuación (36).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0455 & 0 & -0.0545 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.0833 & 6.4746 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4545 \\ 0 \\ -0.8333 \end{bmatrix} u \quad (36)$$

Con la ecuación de estado del SPISC se evalúan los polos en lazo abierto, quedando expresados en la ecuación (37).

$$s_1 = 0; s_2 = -0.0455; s_3 = -2.5436; s_4 = 2.5436 \quad (37)$$

Se observa que el polo s_4 se encuentra en el semiplano derecho, lo que confirma claramente que el sistema es inestable en lazo abierto.

Diseño del controlador

El método de diseño por asignación de polos y el uso de la fórmula de Ackerman, consiste en determinar la ley de control por retroalimentación, expresada por la ecuación (38).

$$u = -Kx \quad (38)$$

Por lo que se necesita encontrar K , la matriz ganancia de retroalimentación de estado expresada como:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][B : AB : \dots : A^{n-1}B]^{-1}\phi(A) \quad (39)$$

Donde $\phi(A)$ es el polinomio característico matricial que se expresa como sigue:

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0 \quad (40)$$

Siendo α_n los coeficientes del polinomio característico deseado. La ubicación de los polos de lazo cerrado en la localización deseada se expresa por la ecuación siguiente:

$$s = \mu_1 ; s = \mu_2 ; \dots ; s = \mu_n \quad (41)$$

Para realizar el diseño, primero es necesario que el sistema sea de estado completamente controlable, por lo que se necesita verificar la controlabilidad del SPISC con la matriz de controlabilidad M_c expresada por la ecuación siguiente:

$$M_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]; M_c \neq 0 \quad (42)$$

Considerando, que las variables de estado, son medibles y disponibles por retroalimentación. La figura 2 representa el diagrama de bloques del SPISC en la representación de espacio de estados, con control de retroalimentación, observándose que, u es retroalimentada por el controlador, de acuerdo a la ecuación (38).

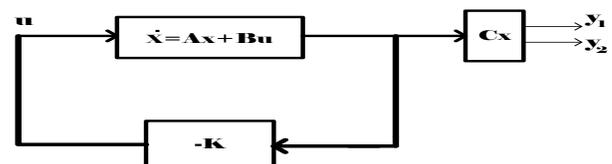


Figura 2 Diagrama de bloques del SPISC con control de retroalimentación de estados

Simulación y resultados

Usando la herramienta computacional MATLAB/Simulink y en base a la metodología de diseño, se verificó la controlabilidad del sistema, obteniéndose que $M_c = 4$, por lo tanto, el SPISC es controlable. Se desea que los polos de lazo cerrado estén ubicados en las siguientes localizaciones:

$$\mu_1 = -2 + 3i; \mu_2 = -2 - 3i; \mu_3 = \mu_4 = -3 \quad (43)$$

A continuación, evaluando la matriz ganancia de retroalimentación K se obtiene:

$$K = [-39.75 \quad -39.45 \quad -86.80 \quad -33.46] \quad (44)$$

Ahora con los gráficos 1 y 2, obtenidos en simulación, los resultados demuestran, que después de aproximadamente 2.75 segundos el sistema del péndulo está en la posición de equilibrio vertical $\theta = 0$ y el carro en $x = 0$. Esto puede observarse en el gráfico 1.

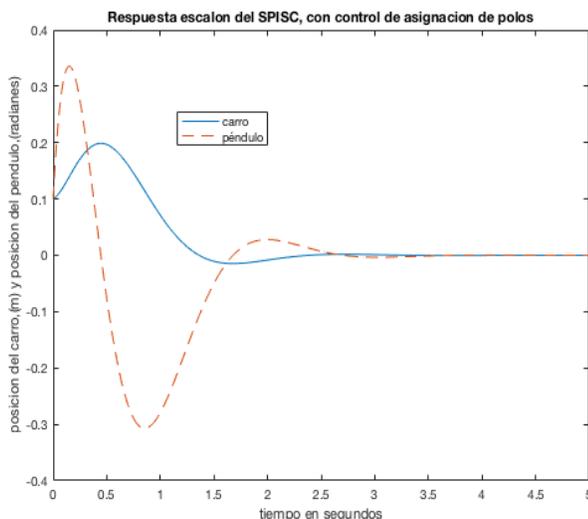


Gráfico 1 Respuesta del controlador para la posición de carro y ángulo del péndulo--obtenido con MATLAB/Simulink

Esto mismo sucede, con la velocidad del carro $\dot{x} = 0$, y la velocidad del péndulo $\dot{\theta} = 0$, el sistema se establece en aproximadamente 2.75 segundos, como se observa en el gráfico 2. Sin embargo, la posición del péndulo se incrementa hasta 0.48 rad/seg antes de llegar al equilibrio origen).

Con los resultados obtenidos en los gráficos de simulación, es posible visualizar que la respuesta del controlador para estabilizar al SPISC es eficaz, sin embargo, la respuesta de control puede ser mejorada con otro tipo de controlador más robusto.

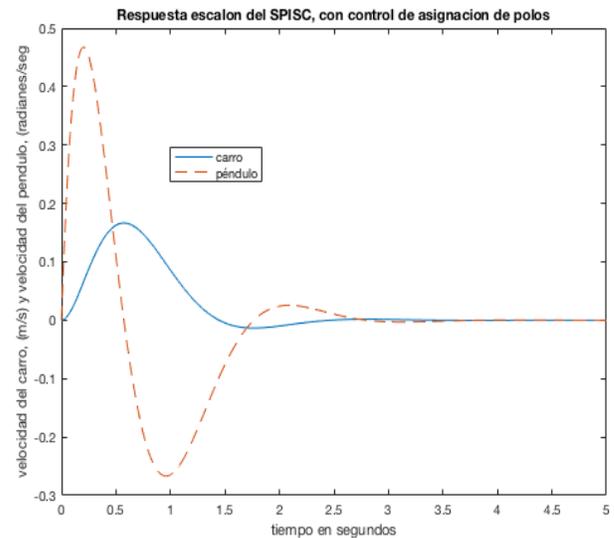


Gráfico 2 Respuesta del controlador para las velocidades del carro y péndulo obtenido con MATLAB/Simulink.

Conclusiones

El modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre un carro (SPISC), fue desarrollado usando el método de Euler-Lagrange que resultó un método eficaz para derivar las ecuaciones de movimiento no lineal. Fue posible linealizar el sistema SPISC cerca de su posición de equilibrio, obteniéndose una buena aproximación del sistema no lineal, y a partir del modelo linealizado y su representación en variables de estado, se diseñó un controlador para la estabilización del péndulo en la vertical superior usando el método de asignación de polos y aplicando la fórmula de Ackerman.

Los resultados de simulación del SPISC permitieron demostrar que el sistema logró estabilizarse alrededor del punto de equilibrio cuando el péndulo se encontró en la parte de arriba. Este trabajo aporta una metodología que puede ser adaptada y servir como base, en el modelado y diseño de control de otros sistemas no lineales.

Agradecimiento

Los autores agradecen a la Facultad de Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones de la Universidad Veracruzana por el apoyo brindado para la realización de este trabajo.

Referencias

Bishop, R. (2013). *Modern Control Systems*. California, USA: Prentice Hall.

Dorf, R. (2011). *Modern Control Systems*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall.

García Martínez, J. R. (2015). *Análisis y Diseño de un Controlador para un Péndulo Invertido Usando los Métodos de Espacio de Estados*. Universidad Veracruzana. Poza Rica, Ver.: Universidad Veracruzana.

García, J. (Diciembre de 2016). Las Leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro. (Ecorfan, Ed.) *Revista Tecnología e Innovación*, 3(9), 11-19.

Mahbubeh Moghaddas, M. R. (2012). Design of optimal PID controller for inverted pendulum using genetic algorithm. *International Journal of Innovation*, Vol. 3(4).

Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*. (P. Hall, Ed.) Saddle River, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Ogata, K. (2004). *Systems Dynamics*. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Pearson Prentice Hall.

Vijayanand Kurdekar, S. B. (2013). Inverted Pendulum Control: A brief Overview. *International Journal of Modern Engineering Research*, Vol. 3(2249-6645).