

## Propuesta didáctica para la comprensión, consolidación y aplicación de las principales técnicas de conteo en la resolución y comprobación de problemas de probabilidad

### Didactic proposal for the understanding, consolidation and application of the main counting techniques in the resolution and verification of probability problems

HERRERA-MIRANDA, Miguel Apolonio†\*, HERRERA-MIRANDA, Israel, VILLAGÓMEZ-MÉNDEZ, Juan y CASTILLO-MEDINA, Jorge Antonio

*Cuerpo Académico en consolidación Estadística Aplicada UAGRO-203, LGAC Didáctica de la Probabilidad y Estadística Universidad Autónoma de Guerrero. Facultad de Matemáticas sede Acapulco.*

ID 1<sup>er</sup> Autor: Miguel Apolonio, Herrera-Miranda / ORC ID: 0000-0003-4857-839X. CVU CONACYT ID: 214836

ID 1<sup>er</sup> Coautor: Israel, Herrera-Miranda / ORC ID: 0000-0001-8031-797X. CVU CONACYT ID: 299348

ID 2<sup>do</sup> Coautor: Juan, Villagómez-Méndez / ORC ID: 0000-0001-8385-8624. CVU CONACYT ID: 111892

ID 3<sup>er</sup> Coautor: Jorge Antonio, Castillo-Medina / ORC ID: 0000-0001-8393-8894, CVU CONACYT ID: 476324

DOI: 10.35429/JPD.2019.10.3.25.36

Recibido 01 de Noviembre, 2019; Aceptado 27 de Diciembre, 2019

#### Resumen

##### Resumen:

El proceso de Enseñanza-Aprendizaje es complejo; en primer lugar, es importante el interés, y la motivación del alumno. Además de lo anterior, el contexto social y cultural, puede ejercer una influencia positiva o negativa para el aprendizaje en el área de matemáticas y particularmente, sobre las nociones de probabilidad. El presente trabajo presenta una propuesta didáctica que se apoya con el uso de herramientas computacionales. El objetivo de esta propuesta es mejorar la comprensión y fijación de conceptos de técnicas de conteo mediante el uso de formas visuales y descriptivas (tablas y codificaciones adecuadas). Se presentan ejemplos de la vida real, para que el alumno pueda construir definiciones formales que permitan generalizaciones bajo un rigor matemático. Para el diseño de la estrategia de enseñanza nos apoyamos en las teorías constructivistas y del aprendizaje bajo situaciones didácticas. Estos modelos didácticos tienen un gran potencial educativo porque fomentan la reflexión y el análisis. De esta manera el estudiante adquiere habilidades en el planteamiento, resolución, interpretación y comprobación de problemas de probabilidad. En una segunda etapa se espera experimentar con la aplicación de esta propuesta en el aula. Así se podrán identificar las dificultades en los procesos de enseñanza aprendizaje y proponer estrategias didácticas novedosas.

Probabilidad, Técnicas de Conteo, Enseñanza

#### Abstract

The Teaching-Learning process is complex; First, the interest, and motivation of the student is important. In addition to the above, the social and cultural context can have a positive or negative influence on learning in the area of mathematics and particularly on the notions of probability. The present work presents a didactic proposal that is supported by the use of computational tools. The objective of this proposal is to improve the understanding and fixation of concepts of counting techniques through the use of visual and descriptive forms (appropriate tables and codifications). Real-life examples are presented, so that the student can build formal definitions that allow generalizations under mathematical rigor. For the design of the teaching strategy we rely on constructivist and learning theories under didactic situations. These teaching models have great educational potential because they encourage reflection and analysis. In this way the student acquires skills in the approach, resolution, interpretation and verification of probability problems. In a second stage it is expected to experiment with the application of this proposal in the classroom. In this way, difficulties in teaching-learning processes can be identified and innovative teaching strategies can be proposed.

Probability, Counting Techniques, Teaching

**Citación:** HERRERA-MIRANDA, Miguel Apolonio, HERRERA-MIRANDA, Israel, VILLAGÓMEZ-MÉNDEZ, Juan y CASTILLO-MEDINA, Jorge Antonio. Propuesta didáctica para la comprensión, consolidación y aplicación de las principales técnicas de conteo en la resolución y comprobación de problemas de probabilidad. Revista de Didáctica Práctica. 2019. 3-10: 25-36.

\*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: herrerapolo@hotmail.com)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

La enseñanza de las Matemáticas es fundamental en el desarrollo académico del estudiante de cualquier nivel, esto ha existido en todas las épocas de la historia de la humanidad en cuanto a educación se refiere; pero, ya hace unas décadas la importancia de la Estadística ha tomado una relevancia fundamental a nivel educativo, tecnológico, científico y social. Últimamente la enseñanza de la Estadística ha presentado un gran desarrollo debido a su creciente aplicación en varios campos de la ciencia, la tecnología. Se conocen ampliamente investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje y el análisis del pensamiento probabilístico se han desarrollado fundamentalmente en las últimas siete décadas en México. En las décadas de 1950 y 1960 la investigación fue acometida por Piaget e Inhelder principalmente y por psicólogos con distintas orientaciones teóricas. El periodo de 1970 y 1980 y posteriores hasta la fecha ha sido una continuación del trabajo de Piaget. Muchos investigadores han seguido la línea trazada por Piaget y Fischbein, y han estudiado la manera cómo piensa la gente ante situaciones aleatorias. La investigación ha avanzado más allá, describiendo los heurísticos y las ideas equivocadas que se dan en el desarrollo cognitivo de un rango amplio de conceptos de probabilidad.

## Justificación

Debido a la importancia de la Estadística en consecuencia para la enseñanza de la probabilidad de sus fundamentos y conceptos, dentro de ello la importancia de la comprensión, fijación y aplicación correcta de los conceptos de la probabilidad. Dentro de la formación del estudiante la resolución de problemas de probabilidad aunado con la dificultad matemática que conlleva, el alumno enfrenta el reto de buscar y encontrar soluciones adecuadas que le permitan desarrollar la habilidad para plantear, resolver, interpretar y comprobar problemas. Por otro lado, en los principales libros de textos, podemos detectar dos aspectos importantes, referente a la bibliografía probabilística, se conocen publicaciones excelentes en su lengua original principalmente: inglesa, francesa, ruso, alemán, chino e italiano, etc., sin embargo, la bibliografía en México es escasa y consta mayormente de traducciones.

La razón para realizar este trabajo se basa en dos aspectos: Primero, que la enseñanza de las disciplinas científicas en México no puede seguir descansando solamente en textos escritos con la idiosincrasia de otros países. Donde la bibliografía básica para la enseñanza esta casi siempre escrita por sus propios nacionales, bajo su sistema y políticas educativas. En segundo lugar algunas traducciones de los textos han sido hechas por personas no expertas en la materia provocando que se pierda claridad y entendimiento en los conceptos y definiciones, debido a una traducción deficiente, siendo el caso de los conceptos de las técnicas de conteo que nos preocupa porque hemos detectado mediante una revisión y análisis en su presentación y redacción en los principales textos recomendados de la bibliografía propia de la asignatura, encontrando dificultades muy marcadas por los estudiantes, incluso de profesores para entender claramente las definiciones y aplicaciones del análisis combinatorio, dificultando que el estudiante asimile y se apropie del conocimiento, lo que nos conduce a reflexionar sobre la relevancia que tiene que ver con una buena comunicación entre maestro y estudiante para lograr un efectivo aprendizaje dentro del aula, por lo cual innovar y buscar alternativas mediante estrategias didácticas que coadyuven a lograr dichos propósitos

## Objetivos

Siendo el objetivo principal la comprensión y fijación permanente de conceptos de técnicas de conteo, mediante aspectos visuales sin recurrir en primera instancia a las definiciones formales matemáticas, si no que paso a paso ir asimilando y fijando los conceptos de interés. Para ello presentamos las 2 alternativas que incluye básicamente los siguientes aspectos:

- 1) Visual, mediante un ejemplo real con elementos, actividades o acciones pertenecientes a un conjunto.
- 2) Descriptiva, mediante una tabla muchas veces utilizando una codificación adecuada

Explicación del tema en general y explicar porque es importante.

**Desarrollo**

Presentar y puntualizar información que se requiera para mediante la técnica expositiva e interactiva, de las actividades propias, organizando la forma de trabajo mediante sesiones con apoyo de equipo computacional, calculadoras científicas, cañón, pizarrón y materiales didácticos que permitan un ambiente apropiado para el aprendizaje de las técnicas de conteo Principio aditivo. Forma visual ejemplo real. Una persona tiene de \$13 pesos ¿Que puede comprar?



Figura 1 Forma visual real con 3 eventos

Evento 1 Helado\$7	Evento 2 Jugo\$9	Evento 3 Lunch\$ 10
Coco	Naranja	Torta de jamón
Chocolate	Zanahoria	Sandwich
Fresa	Verde	Hamburguesa

Tabla 1 Forma tabular descriptiva

Opciones de comprar: un helado, una bebida o un lunch: =  $n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 3 + 3 = 9$

**Redacción del concepto: principio aditivo**

Considere la existencia de K eventos ( $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ ), y cada evento contiene  $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$  elementos o alternativas respectivamente, mismos que pueden ser seleccionados. Entonces las diferentes maneras o formas de seleccionar un elemento o alternativa de los eventos, la determina la suma de los  $n_i$  de los eventos involucrados, representada:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = N \tag{1}$$

Principio de la multiplicación. De la figura 1 y tabla 1 podemos ejemplificar el Principio de la multiplicación. Con los 3 eventos, ahora la persona debe elegir una opción de cada evento.

Opciones de escoger un helado, una bebida y un lunch:  $n_1 * n_2 * n_3 = 3 * 3 * 3 = 27$ .

Redacción del concepto: Principio multiplicativo:

Considere la existencia de "k" Eventos ( $E_1, E_2, E_3 \dots E_k$ ), y cada Evento contiene  $n_1, n_2, n_3 \dots n_k$  elementos o alternativas respectivamente, mismos que pueden ser seleccionadas. Entonces las diferentes maneras o formas de seleccionar un elemento o alternativa de cada uno de los "k" eventos, la determina:

$$n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_k = N \tag{2}$$

Donde:

$E_i$  = Identificación de cada Evento.

$n_i$  = Número de Elementos o alternativas dentro del Evento i.

**Permutación de "n" elementos todos distintos**

La Permutación de "n" elementos, opciones o actividades todos distintos entre ellos, consiste en obtener todos los ordenamientos o formaciones posibles de los "n" elementos, y se representa con:  $P_n = n!$  "n" nos indica el número de elementos que queremos ordenar o permutar (todos distintos).  $n!$  nos indica el número de factores enteros multiplicados desde 1 hasta n

El resultado de esta multiplicación indica las diferentes formas o maneras en que pueden ser ordenados o permutados.

Ejemplo 1: Sea el evento  $A = \{\clubsuit, \odot, \heartsuit\}$ ,  $n=3$ ,  $P_n = 3! = 3*2*1=6$  Formas diferentes de ser ordenados los elementos.

Ejemplo 2: Permutar las siguientes actividades: Nadar, Tocar Piano, Ir al Cine.

Codificamos:  $N=Nadar$ ,  $P=Piano$ ,  $C=Cine$

Comando Mathematica:

Permutations[{{N,P,C}}]={{N,P,C},{N,C,P},{P,N,C},{P,C,N},{C,N,P},{C,P,N}}

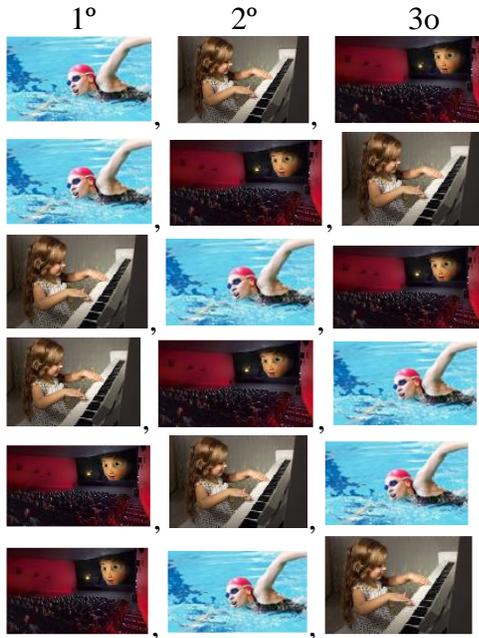


Figura 2 Permutación de 3 actividades humanas

**Permutación de "r" elementos, tomados de los "n" elementos (todos distintos).** La Permutación de "r" elementos tomados de los "n" elementos, está determinada por:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = N \tag{3}$$

Cuyo resultado N son todas las tuplas posibles de tamaño "r" con sus respectivas permutaciones de cada tupla.

Notación: Donde "n" nos indica el total de elementos, todos distintos, "r = 0,1,2...n" nos indica el número de elementos que seleccionamos o tomamos. n! nos indica el número de factores enteros multiplicados desde 1 hasta n

Ejemplo. 3. Sea n=4 elementos y r=3

Permutations[{{♣,☺,♥,■}},{3}]=  
 Mathematica. Comando

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Tupla	Permutaciones de la tupla
{♣, ☺, ♥}	{♣, ☺, ♥} {♣, ♥, ☺} {☺, ♣, ♥} {☺, ♥, ♣} {♥, ♣, ☺} {♥, ☺, ♣}
{♣, ☺, ■}	{♣, ☺, ■} {♣, ■, ☺} {☺, ♣, ■} {☺, ■, ♣} {■, ♣, ☺} {■, ☺, ♣}
{♣, ♥, ■}	{♣, ♥, ■} {♣, ■, ♥} {♥, ♣, ■} {♥, ■, ♣} {■, ♣, ♥} {■, ♥, ♣}
{☺, ♥, ■}	{☺, ♥, ■} {☺, ■, ♥} {♥, ☺, ■} {♥, ■, ☺} {■, ☺, ♥} {■, ♥, ☺}

Tabla 2 Permutaciones de  ${}_n P_r=3$

Permutación de "n" elementos, formado por "k" Eventos con elementos indistinguibles, considerados idénticos en cada evento respectivamente

$$\cdot n P_{n_1!n_2!n_3!.....n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!.....n_k!} = N \tag{4}$$

"n" nos indica el total de elementos, n! nos indica el número de factores enteros multiplicados desde 1 hasta "n", n<sub>i</sub> Los grupos donde i = 1,2,...k., "N" indica el número total de permutaciones que se pueden formar con todos los elementos, donde los "n" elementos están formados por "k" Eventos y en cada Evento hay elementos indistinguibles entre ellos. Ejemplo 4.- sean los elementos S = {1, 1, B}

$${}_n P_{n_1,n_2} = \frac{3!}{2! * 1!} = 3$$

Comando de Mathematica:

Permutations[{{1,1,B}}] = {{1, 1, B}, {1, B, 1}, {B, 1, 1}}

Ejemplo 5.- Sea: S = { A,A,B,B,B }

$${}_n P_{n_1,n_2} = \frac{5!}{2!*3!} = 10$$

Comando Mathematica:

Permutations[{{A,A,B,B,B}}] = {{A, A, B, B, B}, {A, B, A, B, B}, {A, B, B, A, B}, {A, B, B, B, A}, {B, A, A, B, B}, {B, A, B, A, B}, {B, A, B, B, A}, {B, B, A, A, B}, {B, B, A, B, A}, {B, B, B, A, A}}

Permutación de n elementos, donde los "n" elementos son todos distintos, y deseamos formar "k" grupos o celdas o subconjuntos, donde la unión de los "k" grupos debe ser igual a "n".

$$n P_{n_1!n_2!n_3!.....n_K!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!.....n_K!} = N \quad (5)$$

Donde "n" nos indica el total de elementos todos diferentes, n! nos indica el número de factores enteros multiplicados desde 1 hasta n, n<sub>i</sub> Indica el número de elementos en cada E<sub>i</sub> y "N" El resultado de esta operación indica el número total de subconjuntos que se pueden formar con los "n" elementos conservando la estructura de los "k" subconjuntos, donde "k" puede tomar valores = 1,2...n.

Ejemplo 6. Cuatro amigos van de excursión, el campamento dispone de 7 cabañas: 4 sencillas (moradas), 2 dobles (azules), 1 triple (verde) y 1 cuádruple (roja).

¿De cuántas maneras diferentes podrán hospedarse los 4 amigos?

Codificamos: Pepe=PP, Lulú= L, Polo=P y Toño= T



Figura 3 Caso I  $n P_{n_1} = \frac{4!}{4!} = 1$  forma posible



Figura 4 Caso II  $n P_{n_1, n_2} = \frac{4!}{1!3!} = 4$  formas posibles

De hospedarse, en dos cabañas (una triple y la otra sencilla).



{ 3 }	{ 1 }
{PP, L, P}	{T}
{PP, L, T}	{P}
{PP, P, T}	{L}
{L, P, T}	{PP}

Comando Mathematica

```
Subsets[{PP, L, P, T}, {3}]
= {PP, L, P}, {PP, L, T}
  {PP, P, T}, {L, P, T}
```

Figura 5 Caso III  $n P_{n_1, n_2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$  formas posibles  
De hospedarse en 2 cabañas dobles



Disponibles 2 cabañas dobles	
{ 2 }	{ 2 }
{PP, L}	{P, T}
{PP, P}	{L, T}
{PP, T}	{L, P}
{L, P}	{PP, T}
{L, T}	{PP, P}
{P, T}	{PP, L}

Comando Mathematica

```
Subsets[{PP, L, P, T}, {2}]
= {PP, L}, {PP, P} {PP, T}
  {L, P}, {L, T}, {P, T}
```

Figura 6 Caso III  $n P_{n_1, n_2, n_3} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$  formas posibles de hospedarse en 1 cabaña doble y 2 sencillas



Disponibles :		
1 doble	1 sencilla	1 sencilla
{PP, L}	{ P }	{ T }
{PP, L}	{ T }	{ P }
{PP, P}	{ L }	{ T }
{PP, P}	{ T }	{ L }
{PP, T}	{ L }	{ P }
{PP, T}	{ P }	{ L }
{L, P}	{ PP }	{ T }
{L, P}	{ T }	{ PP }
{L, T}	{ PP }	{ P }
{L, T}	{ P }	{ PP }
{P, T}	{ PP }	{ L }
{P, T}	{ L }	{ PP }

Figura 7 Caso IV  $n P_{n_1, n_2, n_3, n_4} = \frac{4!}{1!1!1!1!} = 24$  formas posibles de hospedarse en 4 cabañas sencillas

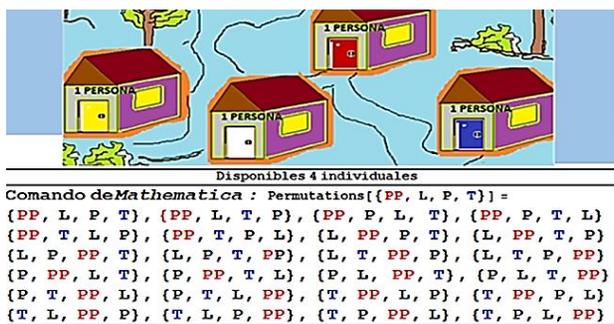


Figura 8

Muestreo con repetición o con remplazo

Notación:  $n^k$  (6)

"n" representa el total de elementos todos ellos diferentes, "k" representa el tamaño de la muestra donde los elementos que forman la muestra pueden repetirse y además permutarse, donde  $k = 1, 2, \dots, n$

Comando de Mathematica: Tuples[{1,2,3,4,..n},k], Ejemplo 7 Sea  $n=4$ , y  $k=2$

$n^k = 4^2 = 16$  muestras de tamaño dos

Tuples  
 [{1,2,3,4},2]={ {1,1},{1,2},{1,3},{1,4},{2,1},{2,2},{2,3},{2,4},{3,1},{3,2},{3,3},{3,4},{4,1},{4,2},{4,3},{4,4}}

Arreglo circular de "n" elementos diferentes:

$(n-1)!$  (7)

Ejemplo 8. Sea  $n= 4$  (A,B,C,D)

$(4-1)! = 3! = 6$  arreglos circulares diferentes.

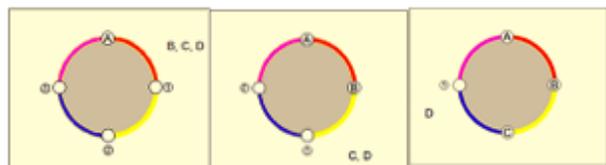


Figura 9

"n" representa el total de elementos todos diferentes y la operación  $(n-1)!$  es la cantidad de los diferentes arreglos en forma circular.

Combinatoria o coeficiente Binomial

$nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = N$  (8)

"n" representa el total de elementos todos ellos diferentes, "r" = 0,1,2,..n donde "r" representa el número de elementos que se tomaran de "n", N nos indica el número de combinaciones de tamaño "r" que pueden formarse, tomados del total de los "n" elementos, sin importar el orden en que suceda.

Ejemplo 9 Sean 3 alimentos (plátano, manzana y yogurt) se escogerán r alimentos, ¿de cuantas maneras puede suceder?

Diferentes maneras de seleccionar "r" alimentos

		$\frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$
		$\frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$
		$\frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
		$\frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$

Figura 10

Aplicaciones de las Técnicas de conteo

Con el auxilio de: dibujos, gráficos, tablas y diagramas se presentan los bosquejos que permiten entender en una forma más clara y sencilla el contexto del problema.

Problemas: Modd. (1974) Mr. Bandido pretende llevar al mercado a vender el ganado tiene 20 vacas (16 vacas legales y 4 robadas), pero tiene la preocupación de ser descubierto por el inspector que revisa el 20% de los envíos, él piensa que tiene 4 estrategias para transportar el ganado ya que tiene dos camiones con capacidad de 20 y 10 vacas, una es hacer un viaje con el camión grande y tres donde hace dos viajes con el camión chico. ¿Qué estrategia disminuye el riesgo de ser descubierto?

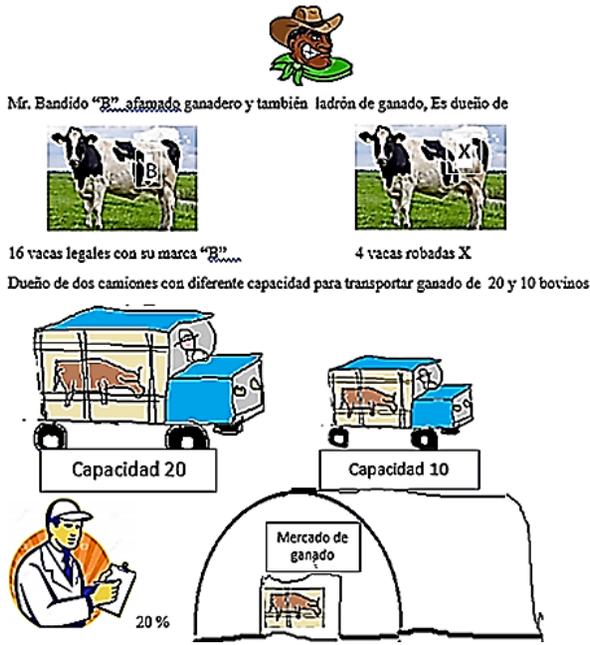


Figura 11

**Estrategia de resolución**

I Identificar si hay probabilidades en el texto y una codificación adecuada

Código	Evento
1	Vaca legal
0	Vaca robada
C20	Camión 20 vacas
C10	Camión 10 vacas
F	Mr. B. Es Descubierto
G	Mr. B. No es Descubierto

Estrategias (Código)	Eventos (Envíos en cada estrategia)	20 vacas Legal   Robada
A <b>E01</b>	C20 1er envío	16 L   4 R
B <b>E11</b> <b>E12</b>	C10 1er envío C10 2º envío	10 L   0 R 6 L   4 R
C <b>E21</b> <b>E22</b>	C10 1er envío C10 2º envío	9 L   1 R 7 L   3 R
D <b>E31</b> <b>E32</b>	C10 1er envío C10 2º envío	8 L   2 R 8 L   2 R

Tabla 3

II ¿Que puede suceder? ayuda a definir los eventos, auxiliarse de tablas, diagramas, dibujos y colores.

Estrategia A - E01 C20 un solo envío		
CASOS	$X_i$ Ganado robado	20 Vacas 16 Legales 4 Robadas
I	0	1 1 1 1
II	1	1 1 1 0
III	2	1 1 0 0
IV	3	1 0 0 0
V	4	0 0 0 0

Tabla 4

Estrategia B - E11 C10 1er envío			Estrategia B - E12 C10 2º envío		
CASO	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas Legales	CASOS	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas 6 Legales 4 Robadas
I	0	1 1	I	0	1 1
II	1	1 0	II	1	1 0
III	2	0 0	III	2	0 0

Tabla 5

Estrategia C - E22 C10 2º envío			Estrategia C - E21 C10 1er envío		
CASOS	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas 7 Legales 3 Robada	CASOS	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas 9 Legales 1 Robada
I	0	1 1	I	0	1 1
II	1	1 0	II	1	1 0
III	2	0 0			

Tabla 6

Estrategia D - E31 C10 1er envío			Estrategia D - E32 C10 2do envío		
CASOS	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas	CASOS	$X_i$ Ganado robado	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas
I	0	1 1	I	0	1 1
II	1	1 0	II	1	1 0
III	2	0 0	III	2	0 0

Tabla 7

III ¿De cuantas formas puede suceder cada evento? auxiliarse de tablas, diagramas, dibujos, colores y las técnicas de conteo, así se facilitará asignar probabilidades a cada evento.

Estrategia A - E01 C20 un solo envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	20 Vacas 16 Legales 4 Robadas	Permutaciones $nP_{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$
I	0	1   1   1   1	$\frac{4!}{4!} = 1$
II	1	1   1   1   0	$\frac{4!}{3! 1!} = 4$
III	2	1   1   0   0	$\frac{4!}{2! 2!} = 6$
IV	3	1   0   0   0	$\frac{4!}{1! 3!} = 4$
V	4	0   0   0   0	$\frac{4!}{4!} = 1$

Tabla 8

Estrategia B - E11 C10 1er envío			
CASO	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas Legales	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$

Tabla 9

Estrategia B - E12 C10 2º envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 6 Legales 4 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$
III	2	0   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$

Tabla 10

Estrategia C - E21 C10 1er envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 9 Legales 1 Robada	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$

Tabla 11

Estrategia C - E22 C10 2º envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 7 Legales 3 Robada	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$
III	2	0   0	$\frac{2!}{2!} = 1$

Tabla 12

Estrategia D - E31 C10 1er envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$
III	2	0   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$

Tabla 13

Estrategia D - E32 C10 1er envío			
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$
III	2	0   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$

Tabla 14

IV Asignar probabilidades a cada evento, requiere tener claro conceptos y aplicación de los fundamentos de la probabilidad.

Estrategia A - E01 C20 un solo envío				
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	20 Vacas 16 Legales 4 Robadas	Permutaciones $nP_{n_1, n_2, n_3} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$	P (X <sub>i</sub> )
I	0	1   1   1   1	$\frac{4!}{4!} = 1$	$\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{364}{969}$
II	1	1   1   1   0	$\frac{4!}{3! 1!} = 4$	$\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 4}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{448}{969}$
III	2	1   1   0   0	$\frac{4!}{2! 2!} = 6$	$\frac{16 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{48}{323}$
IV	3	1   0   0   0	$\frac{4!}{1! 3!} = 4$	$\frac{16 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{64}{4845}$
V	4	0   0   0   0	$\frac{4!}{4!} = 1$	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{1}{4845}$
				$\Sigma = 1$

Tabla 15

Estrategia B - E12 C10 2º envío				
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 6 Legales 4 Robadas	Permutar $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (X <sub>i</sub> )
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{1}{3}$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{8}{15}$
III	2	0   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$	$\frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}$

Tabla 16

Estrategia C - E21 C10 1er envío				
CASOS	X <sub>i</sub> Ganado robado	10 Vacas 9 Legales 1 Robada	Permutar $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (X <sub>i</sub> )
I	0	1   1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{9 \cdot 8}{10 \cdot 9} = \frac{4}{5}$
II	1	1   0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{9 \cdot 1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10}$

Tabla 17

Estrategia C - E22 C10 2° envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 7 Legales 3 Robada	Permutar $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
I	0	1 1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{7}{10} \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{7}{10} \frac{3}{9} 2 = \frac{7}{15}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{3}{10} \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$

Tabla 18

Estrategia D - E31 C10 1er envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
I	0	1 1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{8}{10} \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{8}{10} \frac{2}{9} 2 = \frac{16}{45}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$	$\frac{2}{10} \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

Tabla 19

Estrategia D - E32 C10 2° envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
I	0	1 1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{8}{10} \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{8}{10} \frac{2}{9} 2 = \frac{16}{45}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$	$\frac{2}{10} \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

Tabla 20

V Solución

Probabilidad de ser Descubierta bajo la Estrategia

A-E01:  $P(A-E01) = P(II)+P(III)+P(IV)+P(V)$

Estrategia A - E01 C20 un solo envío				
CASOS	$X_i$	20 Vacas 16 Legales 4 Robadas	Permutaciones $n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$	P (Xi)
		20 % de 20 = 4		
II	1	1 1 1 0	$\frac{4!}{3! 1!} = 4$	$\frac{16}{20} \frac{15}{19} \frac{14}{18} \frac{4}{17} 4 = \frac{448}{969}$
III	2	1 1 0 0	$\frac{4!}{2! 2!} = 6$	$\frac{16}{20} \frac{15}{19} \frac{4}{18} \frac{3}{17} 6 = \frac{48}{323}$
IV	3	1 0 0 0	$\frac{4!}{1! 3!} = 4$	$\frac{16}{20} \frac{4}{19} \frac{3}{18} \frac{2}{17} 4 = \frac{64}{4845}$
V	4	0 0 0 0	$\frac{4!}{4!} = 1$	$\frac{4}{20} \frac{3}{19} \frac{2}{18} \frac{1}{17} = \frac{1}{4845}$
				$\sum = \frac{605}{969}$

Tabla 21

Probabilidad de ser descubierta bajo la Estrategia B-E12:

$P(B-E12) = P(II) + P(III) = 2/3$

Estrategia B - E12 C10 2° envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 6 Legales 4 Robadas	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{6}{10} \frac{4}{9} 2 = \frac{8}{15}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 1$	$\frac{4}{10} \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
				$\sum = \frac{2}{3}$

Tabla 22

Probabilidad de ser descubierta bajo la Estrategia

C:  $P(D-E21) \cup P(D-E22) = P(II-E21) + P(I-E21) (P(II-E22) + P(III-E22))$

Estrategia C - E21 C10 1er envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 9 Legales 1 Robada	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{9}{10} \frac{1}{9} 2 = \frac{1}{5}$
				$\sum = \frac{1}{5}$

Tabla 23

Estrategia C - E22 C10 2° envío				
CASOS	$X_i$	10 Vacas 7 Legales 3 Robada	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	P (Xi)
		20 % de 10 = 2		
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! 1!} = 2$	$\frac{7}{10} \frac{3}{9} 2 = \frac{7}{15}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{3}{10} \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$
				$\sum = \frac{8}{15}$

Tabla 24

Probabilidad de no se descubierta Estrategia C-E21 C10 1er envío:  $P(F-E21) = P(I-E21)$

Estrategia C - E21 C10 1er envío				
CASOS	X <sub>i</sub>	10 Vacas 9 Legales 1 Robada 20 % de 10 = 2	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$	P (X <sub>i</sub> )
I	0	1 1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{5}$

Tabla 25

Probabilidad de ser descubierto bajo la Estrategia C:  $P(D-E21) \cup P(D-E22) = P(II-E21) + P(I-E21) (P(II-E22) + P(III-E22)) = 1/5 + 4/5(8/15) = 47/75$

Probabilidad de ser descubierto bajo la Estrategia D:  $P(F-E31) \cup P(F-E32) = P(II-E31) + P(III-E31) + P(I-E31) (P(II-E32) + P(III-E32))$

Estrategia D - E31 C10 1er envío - E32 C10 2º envío				
CASOS	X <sub>i</sub>	10 Vacas 8 Legales 2 Robadas 20 % de 10 = 2	Permutaciones $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$	P (X <sub>i</sub> )
I	0	1 1	$\frac{2!}{2!} = 1$	$\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$
II	1	1 0	$\frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$	$\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot 2 = \frac{16}{45}$
III	2	0 0	$\frac{2!}{1! \cdot 1!} = 1$	$\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

$P(F-E31) \cup P(F-E32) =$   
 $P(II-E31) + P(III-E31) + P(I-E31) (P(II-E32) + P(III-E32)) =$   
 $(\frac{8}{10}) (\frac{2}{9}) \cdot 2 + (\frac{2}{10}) (\frac{1}{9}) + (\frac{8}{10}) (\frac{7}{9}) ((\frac{8}{10}) (\frac{2}{9}) \cdot 2 + (\frac{2}{10}) (\frac{1}{9}))$   
 $= \frac{1241}{2025}$   
 $P((D-E31) \cup P(D-E32))^C = \frac{28}{45} \cdot \frac{28}{45} = \frac{784}{2025}$

Tabla 26

Conclusión

La estrategia "D" es la que minimiza el riesgo de ser descubierto (hacer dos viajes y llevar en cada viaje 8 cabezas legales y dos robadas).

Interpretación y comprobación del resultado, con lógica y sentido común apegados a los axiomas de probabilidad

Las probabilidades son muy cercanas, pero, si lo llevamos a la precisión decimal, podemos decir que de diez mil casos existe la probabilidad que sea descubierto en 6128. que es la más baja. En cambio, si lo llevamos a la precisión de las decimas podemos pensar que de diez casos en 6 será descubierto y es válido para las 4 estrategias.

- A) Probabilidad de ser Descubierto bajo la Estrategia A = 605/969
- B) Probabilidad de ser descubierto bajo la Estrategia B =  $P(B-E12) = P(II) + P(III) = 2/3$
- C) Probabilidad de ser descubierto bajo la Estrategia C =  $1/5 + 4/5(8/15) = 47/75$

Anexos

En los siguientes problemas se plantean y se recurre a dibujos y tablas que permitan entender el problema para posteriormente seguir los pasos como se hizo en el problema anterior, aplicando las técnicas de conteo y axiomas de la probabilidad apoyado en los conocimientos matemáticos de aritmética y álgebra. Ejemplo 10 Walpole. (2012). Un supervisor se dirige al conjunto de N casas, se sabe que el 40 % están abiertas, del cajón donde hay 8 llaves maestras toma tres aleatoriamente. Cada casa solo puede ser abierta por una llave maestra en particular. ¿Qué probabilidad tiene de entrar?

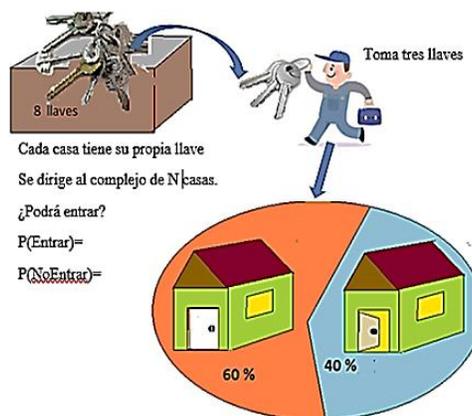


Figura 12

Ejemplo 11. Modd. (1974) El juego consiste en lanzar una moneda, quien obtenga la primera águila gana, deciden: Kin, Donald y Nicolás tirar en ese orden, calcular la probabilidad de ganar de cada jugador.



Figura 13

Gana	1ª ronda			2ª ronda			3ª ronda			... n-sima ronda		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
A	1			1			1			1		
B	0	1		0	1		0	1		0	1	
C	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Ninguno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 27

Problema 12. Modd. (1974) De un grupo de 25 personas, ¿cuál es la probabilidad de que las 25 personas tengan diferente fecha de cumpleaños? (Suponga el año de 365 días y que todos los días tienen la misma probabilidad.)

Día del año	1	2	3	...	23	...	25	...	364	365
				...		...		...		
A	B	C	...	H	J	...	X	R...V	Ww	W
P(A)	P(B)	P(C)	...	P(H)	P(J)	...	P(X)	P(V)	P(Ww)	P(W)
$= \frac{1}{365}$	$= \frac{1}{365}$	$= \frac{1}{365}$	...	$= \frac{1}{365}$	$= \frac{1}{365}$	...	$= \frac{1}{365}$	= 1	= 1	= 1

Figura 14

Conclusiones y recomendaciones

Para fundamentar este trabajo nos apoyamos en la teoría situaciones didácticas Brousseau (1997) y el enfoque constructivista Sadovsky (2005) estas teorías son el soporte para comprender las relaciones que operan en el aula. Los educadores y educandos son actores de la relación de enseñanza-aprendizaje Estos enfoques son fundamentales para comprender las relaciones que operan en el aula. Los educadores y educandos son actores de la relación de enseñanza-aprendizaje. La teoría de las situaciones didácticas y el constructivismo se basa en la idea de que cada conocimiento o saber puede ser determinado por una situación y en las interacciones que se dan en el proceso de formación del conocimiento matemático.

Los investigadores y estudiantes interesados, podrán sugerir o desarrollar nuevos métodos y estrategias que permitan diseñar fortalecer y aplicarse en la formación especializada de la estadística, donde hay un manantial abundante para ser descubierto y aplicado en los diferentes campos de la ciencia todavía por explorarse

Una vez definida la propuesta es necesario llevarla a cabo para valorar su aplicación en dos grupos uno con la forma tradicional y otro con la propuesta aquí presentada.

Podemos concluir bajo las siguientes etapas. La presentación de definiciones y conceptos de probabilidad mediante aspectos visuales para su comprensión y fijación.

Etapas I Definiciones y conceptos básicos.

Etapas II Secuencia de aprendizaje y fijación de conceptos sobre técnicas de conteo.

Paso 1 presentación y explicación de las técnicas de conteo. mediante un lenguaje verbal y visual.

Paso 2 redacción por el estudiante del concepto presentado.

Paso 3 presentación y explicación de la expresión matemática construida en cada caso.

Etapas III aplicación a la resolución de problemas bajo la siguiente guía.

- Identificar si hay probabilidades en el texto y elegimos una codificación adecuada.
- ¿Qué puede suceder? ayuda a identificar los eventos.
- ¿De cuántas formas puedes suceder cada evento? auxiliarse de tablas, diagramas, dibujos, colores y las técnicas de conteo.
- Asignar probabilidades a cada evento, requiere tener claro conceptos y aplicación de los fundamentos de la probabilidad.
- Solución.
- Interpretación y comprobación del resultado (en algunos casos utilizar la técnica de la analogía reducida para la comprobación).

Reflexión: Como se sabe dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, recae en el profesor la responsabilidad de transmitir conocimientos al alumno, sino que influyen varios factores que hacen que el aprendizaje presente casos variados. Se podría pensar que la teoría constructivista es la que mejor funciona y por lo tanto elegirla.

Específicamente en matemáticas donde el objetivo principal es desarrollar la habilidad para pensar frente a un problema que presenta el reto de plantearlo, resolverlo, interpretarlo y en su caso poder comprobarlo.

En la actualidad la resolución de problemas es considerada la parte más esencial en la educación matemática a través de una adecuada selección de problemas, se puede conseguir que el alumnado experimente la utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea con una metodología lúdica y aplicable transformando las realidades abstractas en algo más concretas. Mediante la resolución de problemas se puede conseguir una gran motivación por parte de los alumnos siempre y cuando se incluyan la aplicación en situaciones de la vida.

Otro aspecto relevante de esta actividad versa sobre los libros de texto empleados en la escuela, haciendo un análisis crítico para la selección de actividades y contenidos estadísticos. Proponer actividades didácticas diversas para los alumnos, incluyendo la formulación de los objetos matemáticos involucrados, para la organización de los distintos procedimientos y estrategias de resolución empleados; reflexiones acerca de las dificultades didácticas halladas y/o previstas.

### Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Mood, A.M., Graybill, F.A. y Boes, D.C. (1974): *Introduction to the Theory of Statistics*. USA: McGraw Hill.

Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Paidós

Sadovsky, P. (2005). *La teoría de situaciones didácticas: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de las matemáticas reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: El Zorzal.

Walpole, R.E., Myers R.H., (2012) *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. México: Pearson Educación. 9ª Ed.