

Revisión de modelos matemáticos para captura de agua y nutrientes por la raíz de las plantas

SEPÚLVEDA-JIMÉNEZ, Daniel[`], LOERA-MARTÍNEZ, Jesús^{``} y SEPÚLVEDA-ROBLES, Daniel Eduardo^{```}

D. Sepúlveda, J. Loera y D. Sepúlveda

[`]Centro de Investigación en Economía y Matemáticas Aplicadas de la Uach

^{``}División de Ciencias Económico-Administrativas

^{```}División de Ciencias Económico-Administrativas

sepjim700@yahoo.com.mx

D. Sepúlveda, R. Salazar, F. Pérez y J. Rocha (eds.) Ciencias Químicas y Matemáticas-©ECORFAN, Texcoco de Mora-México, 2015.

6 Introducción

El agua y los nutrientes son absorbidos por las raíces de las plantas debido a que éstas penetran en un gran volumen de suelo. Las raicillas más pequeñas que se van formando tienen una epidermis delgada por la que el agua penetra con facilidad, circulando a través de las células de cada raíz hasta llegar al otro tipo de vasos llamados xilema. Esta vía de circulación está formada por células muertas que tienen más o menos forma de tubo, de manera que muchas células unidas forman largas tuberías por las que el agua asciende de la raíz, a través del tallo, hasta las células de las hojas, en donde es requerida en la mayor cantidad.

Las raíces de las plantas son órganos con potencialidades extraordinarias; a pesar de ello, han sido menos estudiadas que las hojas, debido quizá a que presentan mayores dificultades para su estudio por su crecimiento y funcionamiento subterráneo. Las raíces crecen y se ramifican continuamente durante las etapas activas de las plantas, de manera que se van formando nuevas raíces hacia las capas del suelo en las que existe más agua y también nutrientes que puedan ser absorbidos. Se ha visto que la forma y la disposición de las raíces de las plantas varían de acuerdo con las especies y el ambiente en donde crecen. Algunos tipos de plantas concentran sus raíces en la superficie, otras en zonas intermedias o profundas del suelo y otras más exploran simultáneamente varias capas; de este modo se reduce la competencia entre plantas diferentes, ya que pueden tener las raíces en diversos niveles. En la figura se representan diferentes tipos de raíces.

El contacto del agua y los nutrientes con la superficie de la raíz es necesario para que se produzca la absorción de los mismos, esta se puede producir de dos formas: En forma directa por el crecimiento de las raíces y por movimiento de los nutrientes por difusión o flujo másico desde el suelo hasta la superficie de las raíces. A medida que la raíz crece, se ubica en estratos de suelo en los que encuentra los nutrientes disponibles para la planta, la cantidad de nutrientes que intercepta en forma directa la raíz se encuentra relacionada con la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo ocupado por la raíz y el porcentaje de suelo explorado por la raíz. En general solo un pequeño porcentaje del total de nutrientes absorbido por la raíz llega por esta vía.

La mayor cantidad de los nutrientes se mueve desde el suelo antes de ser absorbido por las raíces, los mecanismos de transporte involucrados en el movimiento de los nutrientes en el suelo hasta su llegada hasta la superficie de las raíces son la difusión y el flujo másico. La difusión, es cuando las raíces absorben nutrientes y se crea un gradiente de concentración de nutrientes entre el suelo y la raíz, el resultado de este gradiente es un movimiento de nutrientes hacia las cercanías de las raíces, la cantidad de nutrientes transportadas por este mecanismo va a estar relacionada con el gradiente de concentración y con el coeficiente de difusión del nutriente, que varía con el tipo de suelo y la movilidad del nutriente en el suelo. El porcentaje de nutrientes respecto del total absorbido que llegan hasta la superficie de la raíz por este mecanismo varía de acuerdo el nutriente en cuestión. El flujo másico es el movimiento de agua y de los nutrientes que se encuentran disueltos en la masa líquida que llega hasta las raíces como resultado del proceso de transpiración de la planta, la cantidad de nutrientes que llega por este movimiento está relacionada con la concentración de los mismos en la solución del suelo y con el volumen de agua que absorbe la planta.

Aproximadamente el 70% del agua que se suministra a los cultivos por medio de riego se devuelve a la atmósfera por evapotranspiración. Por lo tanto, áreas con vegetación constituyen una parte importante del sistema hidrológico de la tierra, que ofrece la más prometedora avenida exigiendo nuestra atención para la optimización del uso del agua para riego.

El límite entre el suelo y el sistema radicular de las plantas es una importante interfaz hidrológica en la que más del 50% del agua por evapotranspiración cruza esta interfaz. Un objetivo importante a largo plazo de la ingeniería y de los hidrólogos debe ser el desarrollo de una mejor comprensión de los procesos hidrológicos que intervienen en el transporte de agua del suelo, en y a través de la vegetación. Este dará lugar a la utilización del agua de riego de manera optimizada y mejorará el rendimiento de los cultivos. La absorción de agua por las raíces constituye un importante componente del balance de agua en el campo y por lo tanto, la comprensión de la absorción de agua por la raíz ayuda a manejar los sistemas de riego de manera más eficiente. Un método cuantitativo que describe la absorción de agua de la raíz debe ser establecido para el uso del agua de manera eficiente. Los procesos de transporte de agua dentro de la zona no saturada del suelo, en la zona de la raíz están controlados por propiedades físicas del suelo, características fisiológicas de la planta y factores meteorológicos. En general, la absorción de agua por la raíz de las plantas en la zona radicular del suelo se modela como una función del potencial de transpiración, la distribución vertical de la raíz y la disponibilidad del agua del suelo, con o sin una función prescrita de la carga hidráulica del suelo esta presión representa el efecto de reducción de la humedad sobre la captación. En la extracción de la humedad de la zona de la raíz se ha observado que se pueden seguir diferentes patrones, y por lo tanto se han propuesto diferentes modelos de extracción de agua de la raíz, algunos suponen que la captación sea constante, lineal, exponencial y en general no lineal dentro de la zona de las raíces. Un modelo que predice la extracción de humedad en la zona radicular de manera más precisa puede ayudar a los programas de riego con la finalidad de un plan para el uso del agua más eficiente.

Los modelos matemáticos para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas se dividen en general en dos grandes categorías: modelos de una sola raíz “microscópicos” y modelos que toman en cuenta la arquitectura de la raíz y de esta en su totalidad como un sumidero modelos macroscópicos. Los modelos microscópicos, tales como el trabajo pionero de Gardner (Gardner, 1960), describen la razón de captura de agua y nutrientes en función de una longitud representativa de la raíz y entonces multiplican esta razón de captura por la longitud total de las raíces en el volumen del suelo. Los modelos macroscópicos, como el de Hillel (Hillel D, 1980), describen el flujo del agua del suelo a través de las fronteras de un volumen unitario del suelo. Los cambios en el volumen se atribuyen a la captura del agua por todas las raíces en dicho volumen como si fueran un sumidero. Ninguno de los modelos que aparecen en la literatura tanto microscópicos como macroscópicos son de validez suficiente para determinar los parámetros necesarios para especificar un cultivo sobre un suelo en particular y usar estos parámetros para predicciones de captura de agua y nutrientes en otros cultivos y en otros tipos de suelos y en otras épocas del año. Estas severas limitaciones hacen necesario en primer lugar, el análisis y sistematización de los modelos matemáticos tanto microscópicos como macroscópicos para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas y en segundo lugar la extensión de los modelos existentes así como la elaboración de modelos más consistentes. También es necesario el análisis de los procesos físicos y químicos que se llevan a cabo en esta captura y que deberán de ser considerados en los modelos matemáticos propuestos.

La extracción de agua y nutrientes por las raíces de las plantas involucran procesos de transporte en la interacción suelo-planta en diferentes escalas espaciales y temporales y hay necesidad de enlazar estos procesos de una manera formal. Específicamente, la arquitectura y características fisiológicas del sistema radical, también como la heterogeneidad del suelo se han tomado muy pobremente en cuenta en los estudios de captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas, por lo que es conveniente llevar a cabo trabajos con la finalidad de analizar esta captura y sus mecanismos en la escala de una sola raíz y en la escala donde se considera la arquitectura de la raíz, las propiedades hidráulicas del suelo y la variación de la reducción de nutrientes y agua alrededor de las raíces.

En esta investigación se lleva a cabo una revisión de modelos matemáticos existentes para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas, se presenta un modelo microscópico para captura de agua y se revisa el modelo microscópico de Nye-Tinker-Barber para captura de nutrientes, además, se revisan funciones propuestas para la absorción de agua por la raíz para modelos macroscópicos.

6.1 Materiales y Métodos

En la primera parte de este trabajo se formula un modelo microscópico de flujo de agua hacia la raíz de una planta individual, este es descrito por la ecuación no lineal que resulta de tomar en cuenta el balance volumétrico de masa y la ley de Darcy. Se formula este modelo en términos de variables adimensionales, y se muestra una solución analítica. Se continúa con la discusión del Modelo de Nye-Tinker-Barber, en este modelo los nutrientes son absorbidos por una sola raíz cilíndrica en una extensión infinita de suelo. La absorción de nutrientes por la raíz se considera que se produce a partir de la fase líquida, es decir de agua en el suelo, se discuten los supuestos del modelo y se desarrolla la formulación matemática de dicho modelo.

En la segunda parte se analizan modelos macroscópicos para la absorción de agua por las raíces de las plantas, el punto de partida es la ecuación no lineal de Richards. En este enfoque el flujo individual hacia una raíz se ignora y se considera el sistema de raíces en general para extraer la humedad del suelo. La tasa de extracción en un determinado punto depende del espacio, el tiempo, el contenido de humedad del suelo, el potencial de agua o una combinación de estas variables.

El agua absorbida por las raíces, se representa como un término de extracción en la humedad del suelo en la ecuación de flujo. Las condiciones de contorno se especifican en los límites del sistema compuesto suelo-planta, así como la superficie del suelo y la parte inferior de la raíz en el dominio o nivel freático. Al hacer caso omiso del flujo hacia las raíces individuales, este enfoque evita complicaciones geométricas implicadas en el análisis la distribución de la raíz. Modelos basados en el enfoque macroscópico no requieren una completa visión de los procesos físicos de la absorción de agua por la raíz y por lo tanto eliminan la dificultad de obtener parámetros de la planta. La diferencia entre diferentes propuestas de modelos es el término de extracción, se describen varios términos de extracción encontrados en la literatura. Se termina este trabajo con las conclusiones pertinentes.

6.2 Resultados: Desarrollo de los modelos matemáticos.

Modelos matemáticos microscópicos para captura de agua y nutrientes por la raíz de una planta.

Captura de agua por una raíz desde una capa cilíndrica de suelo. Formulación del modelo. En este apartado se sigue el desarrollo propuesto por P. A. C. Raats, (Raats P. A. C., 2007).

El flujo microscópico de agua en el suelo hacia una raíz de una planta individual se describe por la ecuación de difusión no lineal que resulta de un balance de masa volumétrico y la ley de Darcy

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (1)$$

Donde r es la coordenada radial, θ es el contenido volumétrico de agua en la escala microscópica en la región de influencia de raíces de plantas individuales, y $D(\theta)$ es la difusividad suelo-agua. La distribución inicial del contenido de agua se supone que es uniforme:

$$t = 0, \quad r_0 < r < r_1, \quad \theta = \theta_i \quad (2)$$

Donde θ_i es el contenido inicial de agua. La condición de frontera en el límite exterior de la capa cilíndrica de suelo es:

$$t > 0, \quad r = r_1 \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

La condición de frontera en la interface suelo-raíz se rige por la demanda de agua por la raíz de la planta y por la capacidad del flujo desde el suelo a la raíz de la planta para satisfacer esta demanda. En la escala de la vegetación, considere un volumen arraigado representativo V de suelo. La captura U de agua desde este volumen de suelo puede ser escrito como:

$$U = \int_V \bar{\lambda} dv = \int_V -F \sigma dv = \int_V D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \sigma dv \quad (4)$$

Donde F es el flujo en la interface suelo-raíz. si el flujo del agua a la raíz no es limitante, la absorción de U está determinada por las condiciones atmosféricas y la etapa de crecimiento de la vegetación. Si el sistema de la raíz es uniforme, entonces en cada punto de la interface suelo-raíz el flujo puede ser escrito como:

$$F = -\frac{U}{\sigma V} = -\frac{\bar{\lambda}}{\sigma} = -\frac{r_1^2}{2r_0} \bar{\lambda} = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (5)$$

Claramente, los aumentos de la superficie específica del área de la raíz σ y el volumen arraigado V reducen la demanda F sobre una base de la raíz individual. Para la condición de frontera en la interface suelo-raíz se consideran dos posibilidades:

A. durante el período, hasta el tiempo crítico t_{crit} , de razón constante de absorción $\bar{\lambda}$:

$$0 < t < t_{crit}, \quad r = r_0, \quad D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\bar{\lambda}_c}{\sigma} = \frac{r_1^2}{2r_0} \bar{\lambda}_c \quad (6)$$

B. Durante el período, después que el tiempo crítico t_{crit} , de la caída de la tasa de absorción $\bar{\lambda}$:

$$t > t_{crit}, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_{crit} \quad (7)$$

Durante el período de razón constante, el balance de masas global en el tiempo t requiere que la captura total de agua por unidad de volumen, $\bar{\lambda}_c t$, es igual a la depleción promedio por unidad de volumen $\phi_s = (\theta_i - \bar{\theta})$

$$\phi_s(\theta_i - \bar{\theta}) = \bar{\lambda}_c t \quad \text{o} \quad t = \frac{\phi_s(\theta_i - \bar{\theta})}{\bar{\lambda}_c} \quad (8)$$

Esta ecuación muestra simplemente que durante el período de tasa constante el promedio de contenido de agua disminuye linealmente con el tiempo.

Formulación del modelo con variables adimensionales.

El modelo puede reformularse en términos de variables sin dimensiones. La posición adimensional ρ , el tiempo τ , el agotamiento del agua del suelo Θ , y la difusividad Δ , se definen respectivamente como:

$$\rho = \frac{r}{r_1}, \quad \tau = \frac{t}{t_d}, \quad \Theta = \frac{\theta_i - \theta}{\theta_i - \theta_{crit}}, \quad \Delta = \frac{D}{\widehat{D}} \quad (9)$$

En donde \widehat{D} la difusividad media, y t_d es un tiempo característico asociado con el flujo capilar de agua definidos por:

$$\widehat{D} = \frac{\int_{\theta_{crit}}^{\theta_i} D d\theta}{\theta_i - \theta_{crit}}, \quad t_d = \frac{r_1^2}{\widehat{D}} \quad (10)$$

El tiempo característico t_d describe el flujo capilar del agua desde el suelo hacia las raíces de la planta. Un segundo tiempo característico t_c se define como la relación entre el suministro de agua en el suelo y la velocidad de absorción $\bar{\lambda}_c$ por las raíces de la planta durante el período de velocidad constante:

$$t_c = \frac{(\theta_i - \theta_{crit})\phi_s}{\bar{\lambda}_c} \quad (11)$$

El tiempo característico t_c es la duración del período durante el cual el agua estará disponible si toda el agua en el suelo podría tomarse en la velocidad constante $\bar{\lambda}_c$. El flujo de agua hacia la raíz de una planta del suelo circundante depende del número geométrico ρ_0 y durante el período de tasa constante, también del número de disponibilidad τ_c respectivamente, definido por:

$$\rho_0 = r_0/r_1 = \phi_r^{1/2}, \quad \tau_c = t_c/t_d = \frac{\widehat{D}(\theta_i - \theta_{crit})(1 - \rho_0^2)}{\bar{\lambda}_c r_1^2} \quad (12)$$

El número de disponibilidad τ_c compara la duración t_c del periodo en que el agua estaría disponible si toda el agua en el suelo fuera tomada en la razón constante $\bar{\lambda}_c$ a el tiempo característico t_d del flujo capilar desde el suelo hacia la raíz de la planta.

En términos de la posición adimensional ρ , el tiempo τ , el agotamiento del agua del suelo Θ y la difusividad Δ , el problema de flujo se plantea de la manera siguiente:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \Delta(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right] \quad (13)$$

Con condiciones iniciales

$$\tau = 0, \quad \rho_0 < \rho < 1, \quad \Theta = 0 \quad (14)$$

Las condiciones de frontera. En la frontera exterior de la capa cilíndrica de suelo son:

$$\tau > 0, \quad \rho = 1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = 0 \quad (15)$$

Las condiciones de frontera en la interface suelo-raíz. Durante el periodo de tasa constante de absorción:

$$0 < \tau < \tau_{crit}, \quad \rho = \rho_0, \quad \Delta(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} = \frac{1 - \rho_0^2}{2\rho_0\tau_c} \quad (16)$$

De estas condiciones de frontera se sigue que el flujo en la interface suelo-raíz es grande si el producto del número geométrico ρ_0 y el número de disponibilidad τ_c es pequeño.

Durante el periodo de caída de la tasa de absorción:

$$\tau > \tau_{crit}, \quad \rho = \rho_0, \quad \theta = 1 \quad (17)$$

Solución analítica para periodo de tasa constante de absorción y difusividad constante.

Se definen como suelos lineales aquellos en que se tiene la difusividad $D = kd\theta/d\theta$ constante y la conductividad hidráulica k lineal en θ . En este caso la solución de la ecuación (13) sujeta a las condiciones dadas por las ecuaciones (14-16) está dada por De Willigen y Van Noordwijk (1987), esta es:

$$\tau_c \theta = \tau + \frac{\rho^2}{4} - \frac{\ln \rho}{2} - \frac{3+4\rho_0^2 \ln \rho - 2\rho_0^2 - \rho_0^4}{8(1-\rho_0^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\rho, \rho_0) \exp(-\beta_n^2 t) \quad (18)$$

Con

$$A_n(\rho, \rho_0) = \frac{\pi(1-\rho_0^2) J_1^2(\beta_n) (J_0(\beta_n \rho) Y_1(\beta_n \rho_0) - Y_0(\beta_n \rho) J_1(\beta_n \rho_0))}{2 \beta_n \rho_0 (J_1^2(\beta_n \rho_0) - J_1^2(\beta_n))} \quad (19)$$

Donde las β_n son las raíces de:

$$J_1(\beta_n r_0) Y_1(\beta_n) - J_1(\beta_n) Y_1(\beta_n r_0) = 0 \quad (20)$$

La solución describe la distribución del contenido de agua alrededor de una raíz individual que resulta de una tasa constante de absorción. En la estructura de esta solución se pueden distinguir dos partes:

Los términos que garantizan que se satisfacen las condiciones iniciales, estos tienen la forma de una caída exponencial y la serie infinita con un tiempo característico τ_d . Y los términos que garantizan que se satisfacen las condiciones de frontera y el balance de masa general, estos tienen la forma de un perfil de tiempo invariante, con el contenido de agua decreciendo linealmente.

Modelo de Nye-Tinker-Barber

En este apartado se sigue el desarrollo propuesto por Nye. P. H. y Tinker. P. B. (1977) y Tinker. P. B. y Nye. P. H. (2000). En este modelo los nutrientes son absorbidos por una sola raíz cilíndrica en una extensión infinita de suelo. La absorción de nutrientes por la raíz se considera que se produce a partir de la fase líquida, es decir de agua en el suelo. El suelo se supone que es homogéneo e isotrópico, y los cambios en las condiciones de humedad son insignificantes ya que el suelo se supone que está totalmente saturado. En este modelo también se desprecian los efectos de exudados de las raíces y la actividad microbiana, en la absorción de nutrientes por la planta y movimiento de nutrientes en el suelo. El movimiento de los nutrientes a la superficie de la raíz tiene lugar por convección debido a la absorción de agua por la planta, y por difusión de nutrientes en los iones en el agua intersticial del suelo. La relación entre el flujo entrante de nutrientes al interior de la raíz y la concentración de nutrientes en la superficie de la raíz se describe por medio de una ley heurística de Michaelis-Menten. Clásicamente la cinética de Michaelis-Menten se deriva de una reacción catalizada de la enzima más básica. Esto es compatible con la teoría de portadores de nutrientes en la cual los nutrientes son considerados para ser llevados desde superficie de la raíz través de las membranas de las células por las llamadas proteínas portadoras. Así, la ley absorción de Michaelis-Menten parece incluir las características de la vía symplasmic de nutrientes en la raíz.

Alternativamente, la ley de tipo absorción de Michaelis-Menten también podría ser derivada de manera similar a la de la isoterma de adsorción de Langmuir. Esta describe la fracción de sitios de unión de iones de nutrientes libres y ligados en una membrana o sobre una superficie sólida. Esto se traduce en lo que parece ser un tipo de equilibrio de Michaelis-Menten condición para que el número de sitios que se enlazan están acotados en un tiempo dado. Sin embargo, el modelo Nye-Tinker-Barber no considera el mecanismo exacto de la absorción de nutrientes por la raíz de la planta, sino que utiliza una medida heurística experimental tipo Michaelis-Menten, para la absorción de nutrientes.

La ecuación general para el incremento de nutrientes en el suelo en las fases líquida y sólida está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_l c_l + c_s) + \nabla \cdot (c_l \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\phi_l D \nabla c_l) + d_s + d_l \quad (21)$$

Donde c_s es el incremento de iones en la forma sólida, d_s es la razón de transporte de iones en la interface líquido-sólido, c_l es la concentración de nutrientes en la fase líquida del suelo, d_l es la razón de transporte de iones en la interface sólido-líquido, \mathbf{u} es el flujo de Darcy de agua en el suelo esto es volumen de flujo de agua, D es el coeficiente de difusión en la fase líquida del suelo ϕ_l es la fracción de volumen del suelo tomado por el líquido, ϕ_g es la fracción de volumen de gas, aire en el suelo, ϕ_s es la fracción de volumen del suelo en su fase sólida. La conservación del volumen del suelo da:

$$\phi_s + \phi_l + \phi_g = 1 \quad (22)$$

Es conveniente definir la porosidad del suelo como: $\phi = \phi_l + \phi_g$

Si se supone conservación de masa durante el transporte de iones interfacial, esto es, los iones que dejan la fase sólida todos pasan a la fase líquida, así que: $d_s + d_l = 0$.

Si la tasa de adsorción de la fase líquida a la fase sólida es k_a y la tasa de desorción es k_d se tiene:

$$d_s = k_a c_l - k_d c_s = \frac{(k_a/k_d)c_l - c_s}{(1/k_d)} \quad (23)$$

Donde $1/k_d$ es el tiempo de desorción. Suponiendo que $1/k_d$ es muy pequeño o sea que la desorción es muy rápida entonces se obtienen:

$$c_s = \frac{k_a}{k_d} c_l = b c_l \quad (24)$$

Donde $b = \frac{k_a}{k_d}$ se conoce como "potencia de absorción del suelo". La ecuación (21) puede ser escrita de la manera siguiente:

$$(b + \phi_l) \frac{\partial c_l}{\partial t} + \nabla \cdot (c_l \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\phi_l D \nabla c_l) \quad (25)$$

Si se usan coordenadas polares e identificando $c_l = c$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$(b + \phi_l) \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{aV}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = D \phi_l \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (26)$$

Donde a es el radio de la raíz. El flujo de agua está dado por $\mathbf{u} = -aV/r$. V es el flujo de Darcy de agua dentro de la raíz. La cantidad $D_{eff} = \frac{D_f f \phi_l}{\phi_l + b}$ es el coeficiente de difusión efectivo, cuando $b \gg 1$ este coeficiente se simplifica a $D_{eff} = \frac{D_f f \phi_l}{b}$.

La condición de frontera en la superficie de la raíz es:

$$\phi_l D \frac{\partial c}{\partial r} + Vc = \frac{F_m c}{K_m + c} - E \quad \text{en } r = a \quad (27)$$

Donde c es la concentración del nutriente en la fase líquida del suelo, F_m es el flujo máximo del nutriente dentro de la raíz, K_m es la constante de Michaelis-Menten que es igual a la concentración de nutrientes en la superficie de la raíz cuando el flujo de nutrientes dentro de la raíz es la mitad del máximo posible $E = \frac{F_m c_{min}}{K_m + c_{min}}$, donde c_{min} es la mínima concentración cuando la absorción de nutrientes por la raíz se para, y a es el radio de la raíz.

La condición inicial y la condición de frontera alejada de la raíz se establecen de la manera siguiente. En $t = 0$ se supone una distribución uniforme de nutrientes en la fase líquida del suelo. Así que las condiciones iniciales son:

$$c = c_0 \quad \text{en } t = 0 \quad \text{para } a < r < \infty \quad (28)$$

Para todos los tiempos posteriores, la condición de frontera alejada de la superficie de la raíz es:
 $c \rightarrow c_0$ cuando $r \rightarrow \infty$ para $t > 0$ (29)

Si se usan las variables sin dimensiones siguientes:

$$t = \frac{a^2(b+\phi_l)}{D\phi_l} T, \quad r = aR, \quad c = K_m C \quad (30)$$

Donde C , T y R son la concentración, tiempo y variable radial. El Modelo de Nye-Tinker-Barber es:

$$\frac{\partial C}{\partial T} - P_e \frac{1}{R} \frac{\partial C}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) \quad (31)$$

Con las condiciones iniciales y de frontera siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial R} + P_e C = \frac{\lambda C}{1+C} - \epsilon \quad \text{en } R = 1 \quad (32)$$

$$C \rightarrow C_\infty \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty \quad \text{para } T > 0 \quad (33)$$

$$C = C_0 \quad \text{en } T = 0 \quad \text{para } 1 < R < \infty \quad (34)$$

Los parámetros sin dimensiones en estas ecuaciones son:

$$P_e = \frac{aV}{D\phi_l}, \quad \lambda = \frac{F_m a}{DK_m \phi_l}, \quad \epsilon = \frac{Ea}{DK_m \phi_l}, \quad C_\infty = \frac{c_0}{K_m} \quad (35)$$

En lugar de 8 parámetros que aparecen en el modelo de Nye-Tinker-Barber inicial ahora solamente se tienen 4 parámetros. El más importante en el número de Péclet, P_e que muestra el balance entre el movimiento del agua V y la difusión $D\phi_l$ sobre la longitud típica “a”, λ es el parámetro de absorción de nutrientes, C_∞ es la concentración de nutrientes alejados de la raíz y ε es el parámetro que muestra la mínima concentración cuando se para la absorción de nutrientes.

Modelos matemáticos macroscópicos para captura de agua y nutrientes por las raíces de las plantas

La utilización de una función de extracción para representar o calcular la absorción de agua por las raíces de las plantas no es nueva, sin embargo, todas las diversas funciones de extracción propuestas en la literatura son más o menos empíricas. La diferencia más importante entre los diferentes modelos de extracción del agua por la raíz, es la distribución del patrón seleccionado para la absorción para la función de extracción. Este apartado se basa en la revisión propuesta por Shankar V., Hari Prasad K. S., Ojha C. S. P. y Govindaraju R. S. (2013), así como en las referencias originales. Se muestran algunas de las funciones de extracción usadas por diversos investigadores. Los símbolos empleados se corresponden con las referencias originales. Algunas de las notaciones que son utilizadas en estos modelos y son comunes son: K , la conductividad hidráulica no saturada, L la longitud de raíces por unidad de volumen de suelo, T la tasa de transpiración por unidad de área de superficie del suelo, t el tiempo, z la profundidad debajo de la superficie del suelo, z_r la profundidad de la raíz, v la profundidad de la zona de la raíz, θ la humedad contenida por el suelo, θ_s o θ_{sat} el contenido de humedad de saturación, ψ la carga de presión, T_p la tasa de transpiración de la planta, $f(h)$ o $\alpha(h)$ es una función de la humedad del suelo y de la carga de presión, S_{max} es la tasa máxima de extracción de agua por la raíz y E_{pl} es la transpiración real. Modelos encontrados en la literatura científica para el término de absorción de agua por la raíz son:

Gardner (1964). $S = B(\delta - \tau - z)kL$ donde B es una constante, δ es el potencial de agua de las raíces y τ es el potencial de succión del suelo.

Molz y Remson (1970). $S = \frac{-1.6T}{v^2}z + \frac{1.8T}{v}$

Feddes y colaboradores (1978). $S_{max} = \frac{2E_{pl}}{z}$, es la razón máxima de extracción de agua por la raíz. Donde:

$$S = 0 \quad 0 \geq \psi > \psi_1; \quad S = S_{max} \psi_1 \geq \psi > \psi_2 \\ S = S_{max} (\psi - \psi_3) / (\psi_2 - \psi_3) \quad \psi_2 \geq \psi > \psi_3; \quad S = 0 \quad \psi_3 \geq \psi$$

Donde ψ_1 es la máxima carga hidráulica del suelo para la cual $S=S_{max}$; ψ_2 es la mínima carga hidráulica para la cual $S=S_{max}$; y ψ_3 es la carga hidráulica en wilting.

Prasad (1988).

$S(h) = \alpha(h)S_{max}$ Donde: $S_{max} = \frac{2T_j}{z_{rj}} \left(1 - \frac{z}{z_{rj}}\right)$. Donde $\alpha(h)$ es una función prescrita del soil moisture de la carga hidráulica, T_j es la transpiración del j-ésimo día y z_{rj} es la profundidad de la raíz en el j-ésimo día.

Govindaraju y Kavvas (1993). $S_{max} = \frac{E_{pot}}{z_r}$, es la razón máxima de extracción de agua por la raíz, donde:

$$S(\psi) = \alpha(\psi)S_{max}; \quad \alpha(\psi) = \exp(-\delta(\psi - \psi_b)), \quad \psi \leq \psi_b; \quad \alpha(\psi) = 0 \text{ en otros lados}$$

Donde $\alpha(\psi)$ es una función sin dimensiones la cual determina la proporción de la máxima razón de extracción de la raíz para un valor particular de ψ , E_{pot} es la razón del potencial de transpiración, ψ_b es el bubbling presión y δ es una constante de decaimiento exponencial que refleja la razón en la cual el agua permisible a la raíz se reduce cuando el suelo está seco.

Ojha y Rai (1996). $S_{max} = \alpha \left[1 - \left(\frac{z}{z_{rj}} \right) \right]^\beta$ $0 \leq z \leq z_{rj}$ donde: α está dada por: $\alpha = \frac{T_j(\beta+1)}{z_{rj}}$
 $S(h) = f(h)S_{max}$ donde α y β son parámetros del modelo y z_{ij} es la profundidad de la raíz en el j-ésimo día.

Li y colaboradores (1999). $S(h) = \alpha(h)S_{max} = \frac{K_{z_1-z_2}PT_j}{|z_1-z_2|}$, donde: PT_j el el potencial de transpiración en el j-ésimo día y $K_{z_1-z_2}$ es la fracción de la longitud de la raíz total entre las profundidades z_1 y z_2 para un área dada.

Lai y Katul (2000). $S(\theta, z, t) = \alpha(\theta)g(z)E_p(t)$, donde: $\alpha(\theta)$ es la función de eficiencia de la raíz, $g(z)$ es una función de densidad de la raíz y $E_p(t)$ el potencial de transpiración.

Kang y colaboradores (2001). $S(z, t) = f(\theta)T_p(t) \frac{1.8e^{-1.8z/z_r}}{(1-e^{-1.8})z_r}$, donde: $f(\theta)$ es un término sin dimensiones que varía entre 0 y 1, como una función del contenido de agua del suelo, $T_p(t)$ es la razón del potencial de transpiración, z_r es la profundidad en la zona efectiva de la raíz.

Dogan y Motz (2005). $W_r(h, z, t) = \left(1 - \left[\frac{h_{fc}-h}{h_{fc}-h_{wp}} \right]^{C_3/T_p} \right) \left(\frac{\ln C_d}{C_d^{z_r}-1} T_p \right) C_d^z$ si $h \leq h_{fc}$, y
 $W_r(h, z, t) = 0$, si $h \geq h_{fc}$, donde: $W_r(h,z,t)$ es el término de absorción de agua por la raíz, h_{fc} y h_{wp} son las cargas hidráulicas en la capacidad del campo y en el punto de marchitamiento del suelo alrededor de la raíz, h es la carga hidráulica alrededor de la zona de la raíz, C_d es el coeficiente de cultivo del suelo ($0.1 < C_d < 1$) y C_3 es el parámetro que define la forma de la función de estrés hídrico.

6.3 Conclusiones

En este trabajo se presentan modelos matemáticos para absorción de agua y nutrientes por las raíces de las plantas. Estos modelos están divididos en dos grandes grupos; modelos microscópicos y modelos macroscópicos. Los modelos microscópicos describen la razón de captura de agua y nutrientes en función de una longitud representativa de la raíz y entonces multiplican esta razón de captura por la longitud total de la raíz, los modelos macroscópicos toman en cuenta la arquitectura de la raíz y de esta en su totalidad como un sumidero. Fueron desarrollados dos modelos microscópicos, uno para la captura de agua por la raíz desde una capa cilíndrica del suelo y el modelo de Nye-Tinker-Barber, en el primer caso se formuló el modelo, las condiciones iniciales y de frontera que se deben de satisfacer y se muestra una solución analítica para un caso particular debida a De Willigen y Van Noordwijk, en el segundo caso se desarrolló el modelo, este es para captura de agua y nutrientes por la raíz de una planta, se mostró la ecuación diferencial que lo gobierna así como las condiciones iniciales y de frontera que se deben satisfacer.

En el caso de los modelos macroscópicos el punto de partida es la ecuación diferencial de Richards, la diferencia entre los modelos usados por los diferentes investigadores es el término de absorción de agua y nutrientes por la raíz de las plantas, el cual se considera en la ecuación de Richards como un sumidero, se estudiaron las funciones de sumidero para varios modelos macroscópicos. Se encuentra que los modelos matemáticos usados en la absorción de agua por la raíz de las plantas han incrementado su grado de complejidad, también se encontró que en el cálculo de los parámetros usados en los modelos se toman en cuenta bases y principios de la Física basados en mediciones experimentales. La factibilidad que brindan los modelos macroscópicos en la medición de los parámetros involucrados hace que este tipo de modelos sean los más usados en comparación con los modelos microscópicos.

6.4 Referencias

- Barber. S. A. (1984). *Soil Nutrient Bioavailability. A Mechanistic Approach*. A Wiley-Interscience Publication, New York.
- De Willigen, P., Nielsen, N. E., Slaassen, N., Castrignan,: (2000). A. M. Modelling water and nutrient uptake. In: Smit A. L., Bengough G., Engels C., van Noordwijk M., Pellerin S., van de Geijn S. (eds.) *Root Methods: Handbook*. Springer, Berlin.
- Dogan, A., and Motz, L.H., (2005a). Saturated-Unsaturated 3D groundwater model. I: Development. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(6), pp. 492–504.
- Feddes, R.A., Kotwalik, P.J., and Zaradny, H., (1978). *Simulation of field water use and crop yield*. Centre for Agricultural Publishing and Documentation, Wageningen, The Netherlands.
- Gardner, W.R., (1960). Dynamic aspects of water availability to plants. *Soil Science*, 89, pp. 63–73.
- Gardner, W.R., (1964). Relation of root distribution to water uptake and availability. *Agronomy Journal*, 56, pp. 41–45.
- Govindaraju, R.S., and Kavvas, M.L., (1993). Development of an approximate model for unsaturated flow with root water uptake under rectangular water content profiles assumption. *Journal of Hydrology*, 146, pp. 321–339.
- Hillel, D. (1980). *Applications of Soil Physics*. Academic Press, New York. pp. 385
- Kang, S., Zhang, F., and Zhang, J., (2001). A simulation model of water dynamics in winter wheat field and its application in a semiarid region. *Agricultural Water Management*, 49, pp. 115–129.
- Lai, C.T., and Katul, G., (2000) The dynamic role of root water uptake in coupling potential to actual transpiration. *Advances in Water Resources*, 23, pp. 427–439.
- Li, K.Y., Boisvert, J.B., and Jong, R. De, (1999). An exponential root water uptake model. *Canadian Journal of Soil Science*, 79, pp. 333–343.
- Molz, F.J., and Remson, I., (1971). Application of an extraction term model to the study of moisture flow to plant roots. *Agronomy Journal*, 63, pp. 72–77.

- Nye, P. H. and Tinker, P. B. (1977). *Solute Movement in the Soil-Root System*. Blackwell Scientific Publications.
- Ojha, C.S.P., and Rai, A.K., (1996). Nonlinear root water uptake model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122, pp. 198–202.
- Prasad, R., (1988). A linear root water uptake model. *J. of Hydrology*, 99, pp. 297–306.
- Raats, P. A. C., (2007). Uptake of water from soils by plant roots. *Transp Porous Med*, 68, pp. 5-28.
- Roose T (2000) Mathematical model of plant nutrient uptake. Thesis, D. Phil. Oxford University.
- Shankar V., Hari Prasad K. S., Ojha C. S. P. y Govindaraju R. S. (2013). Optimizing Water Use in Irrigation-A review. *J. of the Indian I. of Science: Vol, 93:2*, pp. 209-225.
- Tinker, P. B. and Nye, P. H. (2000). *Solute Movement in the Rhizosphere*. Oxford University Press.