Propuesta didáctica para el estudio de la derivada y la integral mediante la resolución de problemas contextualizados y la integración de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones

Didactic proposal for the study of the derivative and the integral by means of the resolution of contextualized problems and the integration of the Technologies of the Information and the Communications

ABREU-TORIBIO, Luis Alberto†*, CARRILLO-CORDOVA, José Francisco, PERALTA-JIMÉNEZ, José Ramón y VALENZUELA-CORDOVA, Florelis

Universidad Politécnica del Golfo de México. Carretera Federal Malpaso El Bellote s/n Km. 171. Monte Adentro C.P. 86600 Paraíso, Tabasco

ID 1er Autor: *Luis Alberto, Abreu-Toribio* / **CVU CONACYT ID**: 737780

ID 1er Coautor: *José Francisco, Carrillo-Córdova* / **CVU CONACYT ID**: 736817

ID 2do Coautor: *José Ramón, Peralta Jiménez* / **CVU CONACYT ID**: 668603

ID 3er Coautor: *Florelis, Valenzuela-Córdova* / **CVU CONACYT ID**: 736429

DOI: 10.35429/JIT.2019.19.6.1.14 Recibido: 10 de Marzo, 2019; Aceptado 30 de Junio, 2019

Resumen

El trabajo trata el estudio de la derivada y la integral partiendo de la introducción de problemas contextualizados y la integración de las TIC. El objetivo es presentar una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas contextualizados y la integración de los asistentes matemáticos para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. La novedad que presenta está propuesta didáctica se basa en el trabajo con los problemas contextualizados y la integración de las TIC al proceso de enseñanza aprendizaje, aplicada creadoramente en el estudio de la derivada y la integral para formación de los ingenieros. La significación práctica se manifiesta en la propuesta didáctica, ya que mediante su aplicación se desarrolló el proceso de enseñanza aprendizaje de una forma que permitió que los estudiantes se apropiarán de los contenidos aprovechando la resolución de problemas contextualizados, y la integración de asistentes matemáticos lo que promovió un proceso participativo, reflexivo y contextualizado mejorando los resultados de los estudiantes.

Derivada, Integral, Problemas Contextualizados

Abstract

The work deals with the study of the derivative and the integral based on the introduction of contextualized problems and the integration of ICT. The objective is to present a didactic proposal focused on the resolution of contextualized problems and the integration of mathematical assistants for the improvement of the teaching-learning process of Differential and Integral Calculation. The novelty presented by this didactic proposal is based on the work with contextualized problems and the integration of ICTs into the teaching-learning process, creatively applied in the study of the derivative and the integral for the training of engineers. The practical significance is manifested in the didactic proposal, since through its application the teaching-learning process was developed in a way that allowed the students to appropriate the contents taking advantage of the resolution of contextualized problems, and the integration of mathematical assistants what promoted a participatory, reflective and contextualized process improving student results.

Derived, Integral, Contextualized Problems

Citación: ABREU-TORIBIO, Luis Alberto, CARRILLO-CORDOVA, José Francisco, PERALTA-JIMÉNEZ, José Ramón y VALENZUELA-CORDOVA, Florelis. Propuesta didáctica para el estudio de la derivada y la integral mediante la resolución de problemas contextualizados y la integración de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. Revista de Tecnologías de la Información. 2019. 6-19: 1-14

* Correspondencia del Autor (correo electrónico: luis.abreu@updelgolfo.mx)
† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

La formación de ingenieros capacitados para enfrentar los retos actuales constituye un desafío de las universidades en la época actual. El desarrollo científico técnico alcanzado exige profesionales altamente calificados que sean capaces de atender las necesidades de la sociedad. La formación de los ingenieros es de gran importancia en el desarrollo social y económico de cada país. Es necesario que la sociedad, en general, y los docentes de las universidades, en particular, tomen conciencia de la necesidad de que las escuelas y facultades de ingeniería contribuyan al bienestar y a la satisfacción de todos. La enseñanza de las ingenierías en México "padece de deficiencias derivadas del propio subdesarrollo, donde existe un incipiente desarrollo tecnológico e incomprensión hacia la investigación científica" (Rivera, 1990, p. 3). La educación debe favorecer la formación de ingenieros que sobrepasen los límites de los manuales de operación, se precisa de ingenieros más eficientes en su actividad profesional a partir del dominio de los conocimientos de la ciencia y las tecnologías.

Las matemáticas y las ingenierías siempre han tenido una relación muy estrecha; desde los orígenes de ambas se han retroalimentado. Pueden mencionarse muchos problemas de ingeniería, cuya búsqueda de solución llevó a la creación de un nuevo conocimiento matemático; también hay consenso en el criterio de que no es posible concebir un ingeniero que no tenga una buena formación matemática. Un asunto que debe ser estudiado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en las carreras de ingeniería, es la forma en que deben enseñarse los contenidos matemáticos para que esta área sea un soporte teórico para las diferentes asignaturas de la especialidad y una herramienta para el desarrollo profesional del ingeniero.

Se considera en el contexto de las investigaciones que la matemática tiene como función, en la formación del ingeniero, la de proporcionar los conocimientos, habilidades, hábitos, capacidades y valores necesarios para la interpretación cuantitativa y geométrico-espacial de los problemas que se le plantean al profesional, ya sean de carácter teórico o práctico, que le permitan buscar sus soluciones para resolver problemas profesionales de su contexto de actuación.

De ahí, que esta asignatura sin perder el rigor conceptual que caracteriza a las ciencias matemáticas, tenga, en la formación de los ingenieros, un carácter instrumental contextualizado a la solución de los problemas de la profesión que debe enfrentar el ingeniero en su actividad laboral. El **objetivo** es presentar una propuesta didáctica centrada en la resolución de problemas contextualizados y la integración de los asistentes matemáticos para el perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

Se plantea que la propuesta es didáctica, ya que se trata de transformar el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de Ingeniería, desde su estado actual hasta un estado deseado, determinado por las exigencias que la sociedad le impone a la universidad, donde la resolución sistemática de los problemas contextualizados y la integración de las TIC pueden significar un notable aporte a la formación del profesional.
Perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje del Calculo Diferencial e Integral en los marcos de esta investigación significa que con la integración de problemas contextualizados y las TIC en el tratamiento de los contenidos de la asignatura se promueva un proceso participativo, reflexivo y contextualizado que provoque efectos positivos en los resultados académicos de los estudiantes.

Desarrollo

El carácter didáctico de la propuesta está dado porque las acciones que se proponen van dirigidas a perfeccionar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial e integral de acuerdo con las categorías de la didáctica en su interrelación y considera el papel que deben desempeñar los profesores y estudiantes en este proceso, como componentes personales o personológicos de este. Luego, la propuesta incluye acciones destinadas a los profesores y a los estudiantes, considerando a ambos en la evaluación de las transformaciones que estas pueden producir. Se proponen consideraciones didácticas para el proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada y la integral a partir del planteamiento y resolución de problemas contextualizados, donde se hace uso de la modelación matemática y la integración de las TIC para el logro de una clase activa, reflexiva y contextualizada a la profesión en la que se van a desempeñar los estudiantes.

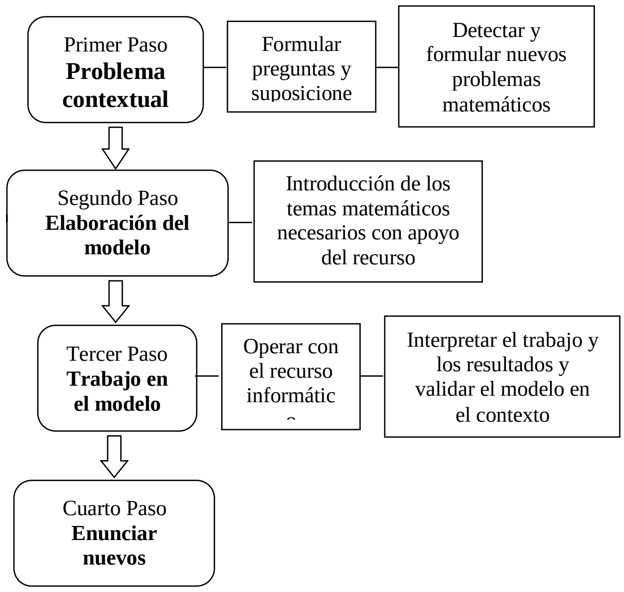
La propuesta didáctica de los autores para la resolución de problemas contextualizados y la integración de las TIC se puede sintetizar como sigue:

1. Determinación de los objetivos y contenidos, tanto de la matemática, como de las demás asignaturas de la carrera con el fin de seleccionar o buscar los problemas contextualizados que se propondrán.
2. Análisis de los problemas aprovechando los recursos informáticos con fines heurísticos.
3. Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para modelar matemáticamente.
4. Determinar el modelo matemático.
5. Dar la solución matemática mediante la aplicación del modelo aplicando los recursos informáticos.
6. Análisis de la solución y del procedimiento a la luz de la interpretación matemática del planteamiento inicial del problema.
7. Comprobar o validar la solución en términos del contexto.
8. Plantear nuevos problemas, analizar la posibilidad de transferencia de los métodos y procedimientos, valorar la utilidad de las tecnologías, ejecución propia y de los demás compañeros, reflexionar sobre la satisfacción en la actividad.

La propuesta que se propone, se diferencia de lo tradicional, pues presenta ventajas con respecto a este (en lo que se refiere a la elaboración de conceptos, relaciones o procedimientos); son importantes los aspectos siguientes:

– Los conocimientos adquieren sentido para los estudiantes porque los aprenden a partir de problemas reales, de la cotidianidad, de otras ciencias o de su futuro contexto laborar.
– Se potencia que los objetivos se alcancen a un nivel superior como resultado de la integración de las TIC, por ejemplo, en vez de una definición verbal (que supone una actitud pasiva por parte de los estudiantes), se procura su obtención con la participación de estos aprovechando las tecnologías, lo que facilita el paso a la abstracción.

La propuesta de los autores debe realizarse según el siguiente esquema (Abreu, 2015, p. 77)



Ejemplo de la aplicación para el estudio de la derivada

Primer paso: Se plantea la siguiente situación contextual

Razón de cambio del valor del dólar (variable discreta).

La siguiente tabla muestra el valor del dólar el día 2 de enero de cada año, durante el período comprendido entre 2015 y 2019. (Fuente: http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-mercado-cambiario/index.html).

t (años)	V (pesos por dólar)
2015	14.8290
2016	17.3529
2017	20.7323
2018	19.4899
2019	19.5878

Calcular qué tan rápido cambió el valor del dólar en un instante en particular.

Los estudiantes deben llegar a conocer la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, (se denotará por V_{ene17}) para ello deben obtener la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

Se formular preguntas y conjeturas tales como:

ISSN: 2410-4000

- ¿Cuál es la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes del 2 de enero de 2017?, y ¿un año después?
- ¿Cómo calcular la razón promedio de cambio en el intervalo de 2016 a 2017?
- ¿Qué significa ese resultado?
- ¿Cómo calcular la razón promedio de cambio en el intervalo de 2017 a 2018?
- ¿Qué significa el resultado obtenido?
- ¿Cuál es el promedio de los dos valores obtenidos?
- ¿Será este valor obtenido una buena estimación para la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017? ¿Por qué?

Segundo Paso: Se elabora el modelo matemático. Los estudiantes trabajan de manera independiente para calcular la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, se denota por V'_{ene17}.

Deben obtener la razón promedio de cambio del valor del dólar un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

En el intervalo de 2016 a 2017, se denota la razón promedio de cambio del valor del dólar como $V_{(2016,2017)}$, y se calcula dividiendo el cambio en V entre el cambio en t, es decir

$$V_{(2016\,,\,2017)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\begin{matrix}\text{valor del dólar} \\ \text{en } 2017\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor de dólar} \\ \text{en } 2016\end{matrix}}{2017 - 2016} =$$

$$V_{(2016\,,\,2017)} = \frac{20.7323 - 17.3529}{2017 - 2016} = 3.3794 \text{ pesos por año}$$

Esto significa que un año antes de 2017, el valor del dólar aumentó aproximadamente a razón de 3.3794 pesos por año. De manera similar, la razón promedio de cambio del valor del dólar en el intervalo de 2017 a 2018 es

$$V_{(2017,\,2018)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\begin{matrix}\text{valor del dólar} \\ \text{en } 2018\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor de dólar} \\ \text{en } 2017\end{matrix}}{2018 - 2017}$$

$$V_{(2017,\,2018)} = \frac{19.4899 - 20.7323}{2018 - 2017}$$

$$V_{(2017,\,2018)} = -1.2424 \text{ pesos por año}$$

¿Cuál es el significado del signo?

Los estudiantes interpretan el resultado anterior y llegan a que después de 2017, el valor del dólar disminuye aproximadamente a razón de 1.24 pesos por año.

Es importante que los estudiantes comprendan que ninguno de estos dos valores corresponde a la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017; pero que dicha razón de cambio está entre estos dos valores; es decir:

$$-1.2424 \text{ pesos por año} < V'_{02/01/17} < 3.3794 \text{ pesos por año}$$

¿Cuál es el promedio de los valores obtenidos?

Los estudiantes calculan el promedio de los valores obtenidos

$$\frac{3.3794 + (-1.2424)}{2} = 1.0685$$

¿Qué significado tiene?

Se puede decir que es una estimación para la razón de cambio del valor del dólar el día 2 de enero de 2017, o sea

$$V'_{02/01/17} = 1.0685 \text{ pesos por año}$$

¿Será este valor una buena aproximación?

Los estudiantes deben comprender que este valor tampoco será una buena aproximación, ya que el intervalo que se utiliza es de un año antes y un año después del 2 de enero de 2017.

Tercer paso: Se trabaja en el modelo.

¿Qué se debe hacer para obtener una mejor estimación?

Para obtener una mejor estimación se deben fijar intervalos más pequeños, por ejemplo, la cotización del dólar por mes.

La siguiente tabla muestra el valor del dólar el segundo día de cada mes, en el periodo comprendido de noviembre 2016 a marzo 2017. (Fuente: http://www.anterior.banxico.org.mx/portal-mercado-cambiario/index.html).

Junio, 2019 Vol.6 No.19 1-14

t (meses)	V (pesos por dólar)
Noviembre	19.1306
Diciembre	20.6149
Enero	20.7323
Febrero	20.5757
Marzo	19.9373

Los intervalos son ahora de un mes, 1 mes = 1/12 de año. Los estudiantes repiten la misma estrategia de calcular la razón promedio un mes antes y un mes después del 2 de enero de 2017.

¿Cuál es la razón promedio de cambio un mes antes del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un mes antes del 2 de enero de 2017 es:

$V_{(dic,\,ene)} =$ __________________________ ¿Cuál es el significado del signo? ____________________

¿Cuál es la razón promedio de cambio un mes después del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un mes después del 2 de enero de 2017 es:
$V_{(ene,\,feb)} =$ __________________________ ¿Cuál es el significado del signo? ____________________

Por lo tanto, se cumple que:
______________ $< V'_{02/01/17} <$ ______________

Una estimación para la razón de cambio el día 2 de enero es: $V'_{02/01/17}$ __________________________

¿Por qué el signo es negativo? __________________________________

¿Se puede obtener una mejor estimación?

¿Será de utilidad una tabla con la cotización diaria del valor del dólar?

La siguiente tabla muestra el valor del dólar en el periodo comprendido del 29 de diciembre de 2016 al 04 de enero de 2017.

t (días)	V (pesos por dólar)
29 diciembre	20.6640
30 diciembre	20.6194
02 enero	20.7323
03 enero	20.8520
04 enero	21.3799

Ahora los intervalos son de un día; más pequeños aún que en la tabla anterior (1 día = 1/30 de mes = 1/360 de año). Los años fiscales se consideran de 360 días.

Los estudiantes repiten la estrategia de calcular la razón promedio un día antes y un día después del 2 de enero de 2017.

¿Cuál es la razón promedio de cambio un día antes del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un día antes del 2 de enero de 2017 es: $V_{(30\,dic,\,2\,ene)} =$ ______________

¿Cuál es la razón promedio de cambio un día después del 2 de enero de 2017?

La razón promedio de cambio un día después del 2 de enero de 2017 es: $V_{(2\,ene,\,3\,ene)} =$ ______________

Por lo tanto, se cumple que:
______________ $< V'_{02/01/17} <$ ______________

Una estimación para la razón de cambio el día 2 de enero es: $V'_{02/01/17}$ __________________________

¿Será posible obtener una mejor estimación?,

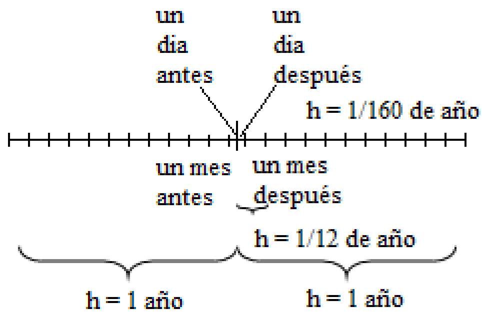
¿Cómo se podría obtener?

Para obtener una mejor estimación sería necesario contar con una tabla de cotización del valor del dólar, por ejemplo, para cada hora o para cada minuto, pero dichas tablas no están al alcance, por lo que se considera que el valor diario es la mejor estimación que se puede hacer con la información que se dispone.

Para obtener las razones promedio se ha considerado como punto inicial el valor del dólar en el instante que interesa (1 de julio de 2002) y como punto final el valor del dólar en diferentes tiempos, antes y después de dicho instante.

Se denota con la letra "*h*" la longitud de los intervalos de tiempo; es decir, a la distancia que hay entre el punto inicial y el punto final; se debe aclarar que dicha distancia siempre debe medirse haciendo referencia a la misma unidad, por eso, los meses y días los se convierten a años.

ISSN: 2410-4000



¿Qué se observa cuando la h es de 1 día = 1/360 de año?

Las razones promedio antes y después del 2 de enero son muy parecidas, por lo que la diferencia entre ellas es muy pequeña, lo que significa que la estimación para la razón de cambio que se obtiene con la cotización diaria es muy buena.

En general, cuando una función se representa con una tabla de valores, no es posible encontrar la razón promedio de cambio en intervalos cada vez más pequeños, por lo que, en esos casos, sólo podemos obtener un valor aproximado para enero la razón instantánea de cambio.

Cuarto paso: Se enuncian nuevos problemas.

Se enuncian nuevos problemas, estos pueden ser:

1. La siguiente tabla muestra el Índice Nacional de Confianza del Consumidor (INCC). Dicho índice mide el nivel de optimismo o pesimismo de los consumidores mexicanos respecto a la evolución futura de la economía y a sus propias finanzas personales. (Fuente: https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/?tm=0&t=10000480#D10000480) Arriba de 50 puntos se considera que hay optimismo, debajo de 50 puntos se considera pesimismo.

t (meses)	INCC (en puntos)
Mar 18	34.34
May 18	38.70
Jul 18	54.35
Oct 18	50.94
Dic 18	56.79
Mar 19	55.92

Estima la razón de cambio del INCC en octubre de 2018.

Otro problema que se puede orientar a los estudiantes es el siguiente:

2. **Razón de cambio de la población de México** (variable continua). De acuerdo con los datos del INEGI, en 2015 la población de México era de 119.9 millones de habitantes y crecía a una tasa de 1.3 % anual (Fuente: https://www.inegi.org.mx/temas/estructura/default.html#Informacion_general). Si la tasa de crecimiento sigue la misma tendencia, la población de México estaría representada por $P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^x$ donde x se mide en años a partir del 2015. Supongamos que nos interesa conocer la rapidez a la que crece la población en el año 2019 (es decir, cuando x = 4).

Se propone a los estudiantes resolver el problema

Para obtener una buena estimación de la razón de cambio en el instante x = 4, hay que obtener la razón promedio de cambio antes y después de x = 4, y que entre más pequeña sea la longitud "h" del intervalo, mejor será la estimación.

En este problema se conoce la fórmula para obtener la población en cualquier instante, por lo que se puede escoger como longitud del intervalo una distancia h = 0.01 antes y después de x = 4. Se puede usar el Microsoft Excel para obtener los valores.

$P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^x$ h = 0.01

	x - h	**x**	**x + h**
x	3.99	4	4.01
P(x)	126.241129	126.257436	126.273744

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [3.99, 4] es:

$$P_{(3.99,\,4)} = \frac{126.257436 - 126.241129}{4 - 3.99} =$$

$$P_{(3.99,\,4)} = \frac{0.016307}{0.01} = 1.6307$$ millones de habitantes por año

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [4, 4.01] es:

$$P_{(4,\,4.01)} = \frac{126.273744 - 126.257436}{4.01 - 4} =$$

ISSN: 2410-4000

$P_{(4,\,4.01)} = \dfrac{0.016308}{0.01} = 1.6308$ millones de habitantes por año

Del análisis se puede afirmar que la razón de cambio de la población de México en 2019, denotada por $P'_{x=4}$, está entre los dos valores anteriores; es decir:

$$1.6307 < P'_{x=4} < 1.6308$$

Las razones promedio antes y después de x = 4 son muy parecidas. Si las restamos (1.6308 – 1.6307 = 0.0001) vemos que difieren en un diezmilésimo; por lo que podríamos decir que una buena estimación para la razón de cambio de la población de México en 2019 es el promedio de ambas, es decir, 1.63075 millones de habitantes por año. Sin embargo, en este caso es posible acercarse más al instante x = 4.

Los estudiantes deben repetir el proceso, pero ahora considerando a h = 0.001 como la longitud del intervalo. Análogamente se puede utilizar el Microsoft Excel para evaluar en cada uno de los puntos y obtener correspondiente tabla: Ahora evaluamos la función de población en 3.999 y en 4.001, y obtenemos la siguiente tabla:

$P(x) = 119.9 \cdot (1.013)^x$ h = 0.001

	x - h	**x**	**x + h**
x	3.999	4	4.001
P(x)	126.255805	126.257436	126.259066

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [3.999, 4] es:

$P_{(3.999,\,4)} =$ ____________________ millones de habitantes por año.

La razón promedio de cambio de la población en el intervalo [4, 4.001] es:

$P_{(4,\,4.001)} =$ ____________________ millones de habitantes por año

¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores? ____________

¿Qué podemos concluir acerca de la razón de cambio de la población de México en el año 2014?______________________________________

Cuando la diferencia entre las razones promedio antes y después del instante que analizamos, es casi cero, o cero, como en este caso, significa que hemos obtenido una buena estimación para la razón instantánea de cambio.

Si la diferencia entre las razones promedio es muy grande, debemos tomar intervalos más y más pequeños, hasta que la diferencia sea casi cero, o cero.

Los acercamientos que se han hecho alrededor del instante x = 4 para obtener una mejor estimación de la razón instantánea de cambio, se les llama límites.

Entonces se puede concluir que:

La razón instantánea de cambio es el valor límite de la razón promedio de cambio, cuando la longitud del intervalo h es muy pequeña (casi cero), es decir,

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio}\\ \text{en el instante x = a}\end{matrix} = \lim_{h\to 0}(\text{Razón de cambio})$$

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio en el}\\ \text{instante x = a}\end{matrix} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

Sin embargo como se tiene que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}}$ que puede escribirse como: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Al sustituir esta última fórmula para la razón promedio de

$$\begin{matrix}\text{Razón de cambio en el}\\ \text{instante x = a}\end{matrix} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cambio de una función f(x) en la expresión que acompaña al límite, obtenemos:

¿Qué nombre recibe la razón instantánea de cambio?

Se puede concluir que en matemáticas a la razón instantánea de cambio se le llama **derivada**. Entonces, se es posible establecer la siguiente definición de la derivada de una función:

La derivada de una función *f* (*x*) denotada como $f'(x)$, está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

si este límite existe.

Notación: La expresión f' se lee como “f prima”

Ahora se pueden proponer otros ejercicios como los siguientes:

1. La siguiente tabla muestra las ventas de petróleo crudo de México a Estados Unidos en los primeros cinco meses del año, durante el periodo de 2014 a 2018. (Fuente: https://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Paginas/IndicadoresPetroleros.aspx).

```
(%i12) S(r):=1000*(1+0.01*r/12)^2;
(%o12) S(r):=1000(1+0.01 r/12)^2
(%i14) define(dS(r),diff(S(r),r));
(%o14) dS(r):=1.666666666666667(8.333333333333328 10^-4 r+1)
(%i15) dS(0.06);
(%o15) 1.66675
(%i16) dS(0.12);
(%o16) 1.666833333333333
```

2.

Año	Ventas (en millones de dólares)
2014	35,638
2015	18,451
2016	15,582
2017	20,047
2018	26,512

¿Cuál es la rapidez en el cambio de las ventas de petróleo crudo en el año 2017?

3. Suponga que el costo total en pesos por la producción de x impresoras se determina por medio de

$$C(x) = 0.0001x^3 + 0.005x^2 + 28x + 3000$$

Encuentre la tasa de cambio promedio del costo total cuando cambia la producción

a) De 100 a 300 impresoras.
b) De 300 a 600 impresoras.
c) Interprete los resultados de a) y b).

4. La depreciación de un automóvil se rige de acuerdo con la función $V(t) = 180\cdot(0.65)^t$, donde V es el valor del automóvil, en miles de pesos, y t es el tiempo, en años, a partir de su compra. ¿Con qué rapidez cambia el valor del automóvil 6 años después de haberse comprado?

5. La demanda de un producto está dada por:

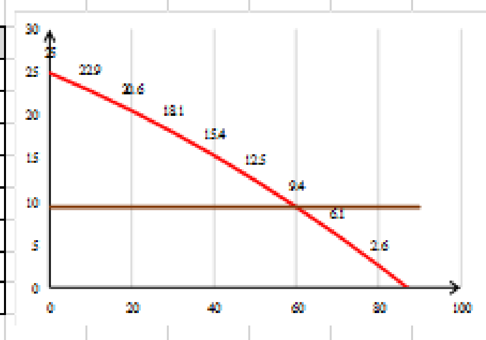
$$q(t) = \frac{100}{3 + \frac{1}{2}e^{-0.3t}}$$

donde *q* son las unidades vendidas (en miles), t meses después de su lanzamiento al mercado. Estime la rapidez con que cambia la demanda a los 5 meses.

6. Una inversión a 20 años, con una tasa de interés variable de r por ciento anual compuesto mensualmente, tiene un valor futuro S, para una inversión inicial de $1 000, dado por

$$S = 1000\left[1 + \frac{0.01r}{12}\right]^{240}$$

x	p(x)	P
0	25	9.4
10	22.9	9.4
20	20.6	9.4
30	18.1	9.4
40	15.4	9.4
50	12.5	9.4
60	9.4	9.4
70	6.1	9.4



¿Cuál es la tasa de cambio de S con respecto a r y qué nos indica si la tasa de interés es de a) 6 %? b) 12 %?

Este problema se puede resolver por medio del wxMaxima, por ejemplo:

La tasa de cambio de S con respecto a r es $\frac{dS}{dr} = 1.67(1 + 0.00083r)$

Si la tasa de interés es del 6%, la tasa de cambio de S con respecto a r es de 1.66675 y si la tasa de interés es de 12% la tasa de cambio es de 1.66683, o sea hay muy poca variación en la tasa de cambio.

Ejemplo de la aplicación para el estudio de la integral

Primer paso: Se plantea la siguiente situación contextual

Excedente de consumidor: La función de demanda p(x) es el precio que una compañía tiene que cobrar para vender *x* unidades de una mercancía. Por lo general, vender grandes cantidades requiere bajar precios, de manera que la función de demanda es una función decreciente.

ISSN: 2410-4000

Calcular el excedente de consumidor en la siguiente situación:

La demanda para un producto, en dólares, es $p(x) = 25 - 0.2x - 0.001x^2$

Encuentre el excedente de consumidor cuando el nivel de ventas es 60.

Se formulan las siguientes preguntas y suposiciones:

– ¿Qué tipo de función es la función demanda? ¿Cuál es su gráfica?
– ¿Cómo se puede calcular el área bajo la curva de demanda?
– ¿Cuál es el excedente del consumidor?

Segundo Paso: Se elabora el modelo matemático.

Se representa gráficamente la función demanda. Los estudiantes representan la función demanda utilizando el Excel, wxMaxima, GeoGebra, etc. Su gráfica utilizando el Microsoft Excel aparece en la siguiente figura

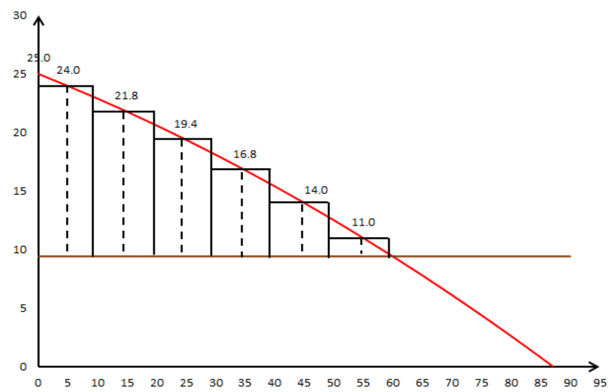
Dividir el intervalo [0, 60] en tres subintervalos iguales (los estudiantes trabajaran de manera individual) y hallar el punto medio de cada uno de los subintervalos, dichos intervalos de longitud 20, o sea la longitud de los subintervalos será 60/3. Determinar además un punto ξi (i = 1, 2, 3), donde ξi puede ser el punto medio de cada subintervalo, o sea ξ tomará los valores 10, 30 y 50 respectivamente, a continuación se evalúa la función demanda p(x) en cada punto ξi, es decir p(10), p(30) y p(50). Los consumidores que pagaron, por ejemplo p(10) dólares pusieron un alto valor al producto; hubieran pagado lo que para ellos valía. Entonces, al pagar solo P = 9.4 dólares han ahorrado la cantidad de

(Ahorro por unidad) (Número de unidades) = [p(10) – 9.4] 20 = (22.9 – 9.4) 20 = 270 dólares

Esto se puede interpretar como el área del rectángulo de base igual a la longitud del subintervalo, en este caso es igual a 20 y de altura [p(10) – 9.4].

Para calcular el ahorro en el intervalo [0, 60] se calcula de manera análoga en ahorro en los otros dos subintervalos y se suman los tres valores, este es un aproximado del ahorro del ahorro real.

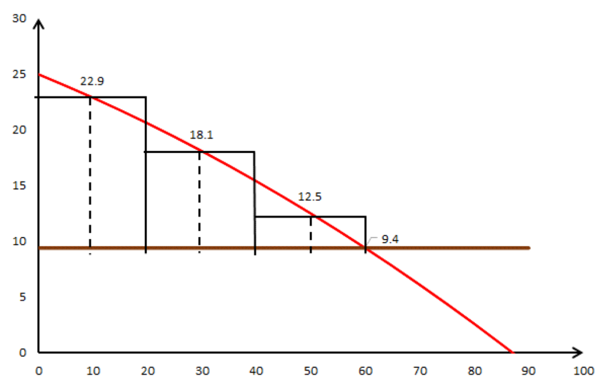
¿Qué se puede hacer para determinar un ahorro lo más aproximado posible al ahorro real?



Si hacemos que el número de subintervalos sea cada vez mayor se obtiene un valor del ahorro lo más cercanos posible al ahorro real.

Tercer paso: Se trabaja en el modelo

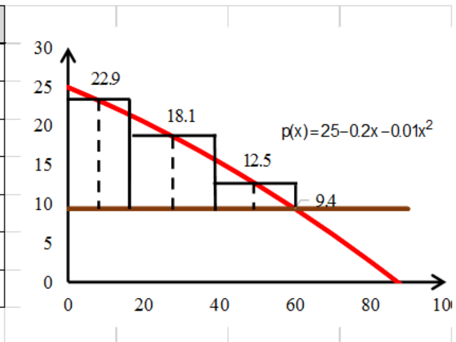
Para calculan los valores los estudiantes trabajan de manera independiente utilizando el Microsoft Excel.



Primero realizan una partición del intervalo [0, 60] en tres subintervalos, esto se puede observar en la siguiente gráfica:

Aquí se muestra la gráfica realizada en Excel.

x	p(x)	P(x)
0	25	9.4
10	22.9	9.4
20	20.6	9.4
30	18.1	9.4
40	15.4	9.4
50	12.5	9.4
60	9.4	9.4
70		

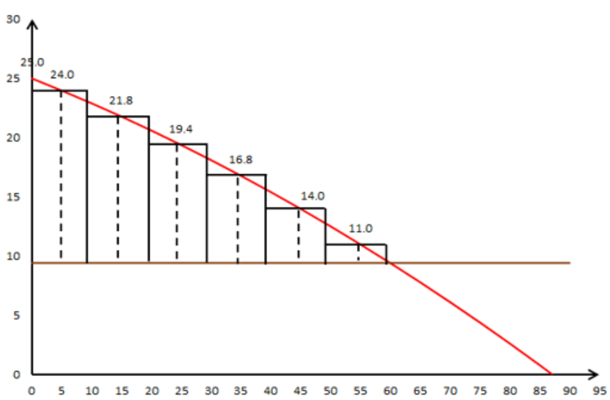


Los correspondientes valores que se obtienen para este primer caso se muestran en la tabla 1:

Tabla 1

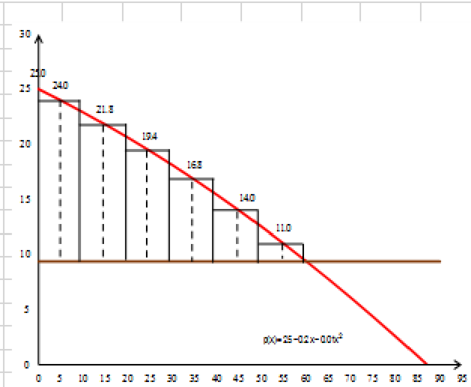
x	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\xi_i = x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}$	$p(\xi_i)$	$p(\xi_i) - P$	A_i
0	10	5	24.0	14.6	145.8
10	10	15	21.8	12.4	123.8
20	10	25	19.4	10.0	99.8
30	10	35	16.8	7.4	73.8
40	10	45	14.0	4.6	45.8
50	10	55	11.0	1.6	15.8
60	10				
70				A=	504.5

El valor del área en este caso es 504.500, es una aproximación para el excedente del consumidor. Se orienta aumentar el número de subintervalos para la partición del intervalo [0, 60] en este caso se realiza una partición en seis (6) subintervalos, la gráfica es:



Aquí se muestra la gráfica realizada en Excel.

x	p(x)	P
0	25.0	9.4
5	24.0	9.4
10	22.9	9.4
15	21.8	9.4
20	20.6	9.4
25	19.4	9.4
30	18.1	9.4
35	16.8	9.4
40	15.4	9.4
45	14.0	9.4
50	12.5	9.4
55	11.0	9.4
60	9.4	9.4
65	7.8	9.4
70	6.1	9.4
75	4.4	9.4
80	2.6	9.4
85	0.8	9.4
90	-1.1	9.4



Los correspondientes valores que se obtienen para este primer caso se muestran en la tabla 2:

Tabla 2

x	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\xi_i = x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}$	$p(\xi_i)$	$p(\xi_i) - P$	A_i
0	5	2.5	24.5	15.1	75.5
5	5	7.5	23.4	14.0	70.2
10	5	12.5	22.3	12.9	64.7
15	5	17.5	21.2	11.8	59.0
20	5	22.5	20.0	10.6	53.0
25	5	27.5	18.7	9.3	46.7
30	5	32.5	17.4	8.0	40.2
35	5	37.5	16.1	6.7	33.5
40	5	42.5	14.7	5.3	26.5
45	5	47.5	13.2	3.8	19.2
50	5	52.5	11.7	2.3	11.7
55	5	57.5	10.2	0.8	4.0
60	5				
65				A=	504.125

El valor del área en este caso es 504.125, es una aproximación para el excedente del consumidor, que es mejor que la anterior.

Así se puede seguir aumentando el número de particiones del intervalo [0, 60] hasta que la longitud de los subintervalos sea cada vez más pequeña, o sea el valor de $n \to 0$

Ahora se puede proceder de manera general y obtener una expresión que nos permita calcular el excedente de consumidor.

La gráfica de una función de demanda típica, llamada curva de demanda, se muestra en la figura 1. Si X es la cantidad de la mercancía que actualmente está disponible, entonces $P = p(x)$ es el precio de venta actual.

El excedente de consumidor representa la cantidad de dinero ahorrado por consumidores en la compra de la mercancía al precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. La figura 2 muestra la interpretación del excedente de consumidor como **el área bajo la curva de demanda** y arriba de la recta $P = p(x)$ Dividiendo el intervalo [0, X] en *n* subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{X}{n}$, y haciendo que ξ_i sea el punto medio del i-ésimo subintervalo, como en la figura 3. Si, después que las x_{i-1} unidades se vendieron, había un total de sólo x_i unidades y el precio por unidad se había establecido $p(x_i)$ dólares, entonces las Δx unidades adicionales podrían haberse vendido (pero no más). Los consumidores que hubieran pagado $p(x_i)$ dólares pusieron un alto valor al producto; hubieran pagado lo que para ellos valía. Entonces, al pagar sólo P dólares han ahorrado la cantidad de (ahorro por unidad)(número de unidades) = $[p(x_i) - P] \cdot \Delta x$

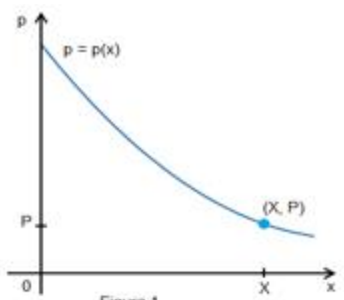


Figura 1

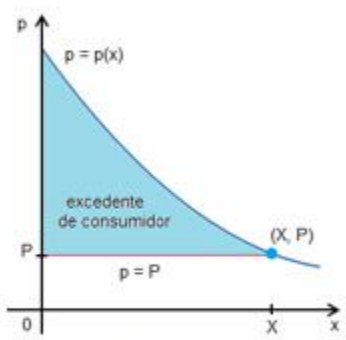


Figura 2

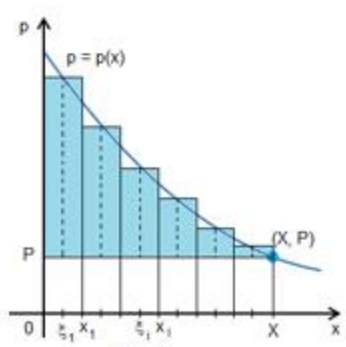
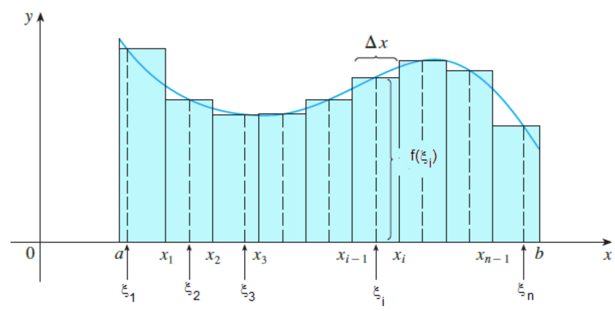


Figura 3

Considerando grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y sumando los ahorros, se obtiene el ahorro total:

$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P] \Delta x$ (Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos de la figura 3.) Si hacemos que $n \to \infty$, esta suma, se llama suma de Riemann y se tiene que

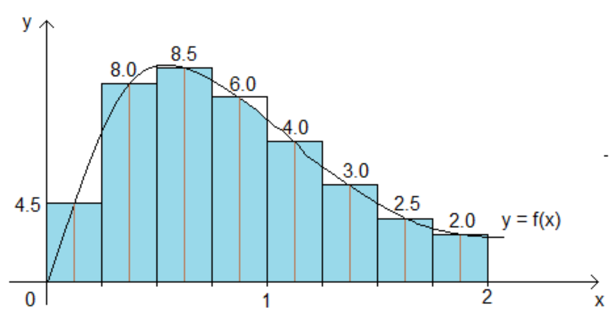
$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P] \Delta x = \int_0^x [p(x_i) - P] dx$ La expresión del lado derecho de la igualdad se llama integral y que los economistas llaman excedente del consumidor por la mercancía.



Cuarto paso: Se enuncian nuevos problemas.

Se enuncian nuevos problemas que ahora pueden responderse, ejemplo de ellos son:

1. Determine una aproximación del área de la región R bajo la curva de f al calcular la suma de Riemann de f correspondiente a la división del intervalo dentro de los subintervalos mostrados en la figura siguiente. Utilice los puntos medios de los subintervalos, así como los puntos representativos, puede auxiliarse de la tecnología para realizar los cálculos.



ISSN: 2410-4000

2. (a). Grafique la función $f(x) = x - 2\ln x \quad 1 \le x \le 5$. Debe utilizar un asistente matemático de los usados en la clase.
(b). Estime el área bajo la gráfica de f usando cuatro rectángulos de aproximación y tomando los puntos muéstrales como (i) puntos extremos derechos y (ii) puntos medios. En cada caso trace la curva y los rectángulos.
(c). Mejore sus estimaciones del inciso (b) usando ocho rectángulos.

Los estudiantes deben llegar a la definición de área bajo la curva que describe la gráfica de una función continua, esta puede presentarse como:

Definición: El Área de la región S que está bajo la gráfica de la función continua f es el limita de la suma de las áreas de rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x\right]$$

La siguiente figura muestra rectángulos de aproximación cuando los puntos muéstrales se escogen como un punto cualquiera en el interior del intervalo. Entonces una expresión más general para el área de S es:

$$A = \lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + ... + f(\xi_n)\Delta x\right]$$

Se puede usar la notación sigma para escribir sumas con muchos términos en forma más compacta. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + ... + f(\xi_n)\Delta x$$

Entonces las expresiones para área se pueden escribir como sigue:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

Además, los estudiantes deben llegar a comprender que un límite de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + ... + f(\xi_n)\Delta x\right]$$

se presenta en una amplia variedad de situaciones (depreciación de un bien, ingreso total, ventas y publicidad, longitudes de curvas, entre otras aplicaciones) aun cuando f no sea necesariamente una función positiva. Por tanto, damos a este tipo de límite un nombre y notación especiales.

Definición de una integral definida: Si f es una función definida para a ≤ x ≤ b, se divide el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0(=a),\ x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot, x_n\ (=b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean cualesquier puntos muéstrales en estos subintervalos, y está en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f de *a* hasta *b* es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x\right]$$

Siempre que este límite exista. Si no existe, decimos que f es integrable en [a, b].

Otros problemas y ejercicios pueden ser

3. Use un asistente matemático hacer una tabla de valores de para las sumas de Riemann para la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$, con n = 5, 10, 50 y 100. ¿Entre que números debe estar el valor de la integral?
4. El costo marginal de manufacturar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por metro). Encuentre el aumento en costo si el nivel de producción se eleva de 2000 metros a 4000 metros.
5. La Alabama Instruments Company ha construido una línea de producción para manufacturar una nueva calculadora. La rapidez de producción de estas calculadoras después de t semanas es $\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$ calculadoras/semana (Nótese que la producción se aproxima a 5000 por semana con el tiempo, pero la producción inicial es menor porque los trabajadores no están acostumbrados a las nuevas técnicas.) Encuentre el número de calculadoras producidas desde principios de la tercera semana a fines de la cuarta semana.
6. Una compañía modeló la curva de demanda para su producto (en dólares) por medio de la ecuación

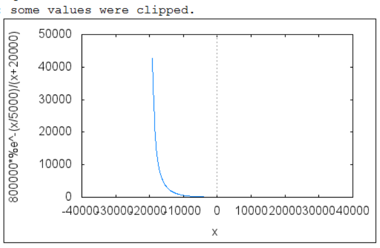
$$p = \frac{800,000\, e^{-\frac{x}{5,000}}}{x + 20,000}$$

Use una gráfica para calcular el nivel de ventas cuando el precio de venta sea $16. A continuación encuentre (aproximadamente) el excedente de consumidor para este nivel de ventas. Se requiere usa una graficadora o computadora con software de gráficas.

Solución del problema utilizando el wxMaxima

```
(%i9) wxplot2d([800000*exp(-(x/5000))/(x+20000)], [x,-40000,40000], [y,0,50000])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
 plot2d: some values were clipped.
```

(%t9)




```
(%i10) integrate(800000*exp(-(x/5000))/(x+20000), x);
```

(%o10) $-800000\,\%e^{4}\,\mathrm{expintegral\_e}\left(1,\frac{x+20000}{5000}\right)$

Conclusiones

El proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral en las carreras de Ingeniería presenta dificultades relacionadas con la forma en que se estructura y ejecuta lo que no facilita la integración de los problemas contextualizados y las TIC de manera que se favorezca la formación del profesional, aunque se cuentan con los recursos materiales para ello.

La propuesta didáctica para la introducción de los problemas contextualizados propone considerar la enseñanza basada en problemas como un proceso que está conformado por los eslabones diseño, ejecución y evaluación.

La integración de las TIC en el proceso se concibe desde una concepción didáctica que promueve la utilización del espacio virtual de la universidad, el Excel y los asistentes matemáticos para la resolución de los problemas contextualizados.

Referencias

Abreu, L. A. (2015). El proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas contextualizados y la integración de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la carrera de ingeniería financiera. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. La Habana, Cuba.

Bayón L., Grau, J. M., Otero, J. A., Ruiz, M. M. y Suárez, P. M. (julio, 2011). Uso de herramientas de Software Libre para la enseñanza de las Matemáticas en los nuevos Grados. Trabajo presentado en el XIX Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, Barcelona, España. Recuperado de: http://www.unioviedo.es/bayon/osh/XIXCUIEET.pdf

Brito, M. L. et al. (mayo/agosto, 2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. Ingeniería Mecánica. 14(2), 129–139.

Camarena, P. (abril, 2006). La matemática en el contexto de las ciencias en los retos educativos del siglo XXI. *Científica*, 10(4), 167-173. Instituto Politécnico Nacional, México, D. F.

Camarena, P. (junio, 2006). Un enfoque de las Ciencias en contexto desde la didáctica. *Innovación Educativa*, 6(31), 21-31. Recuperado de: http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=179414894003

Camarena, P. (2008). *Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias*. En Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Conferencia Magistral, Perú.

Camarena, P. (septiembre/diciembre, 2008). La modelación matemática en la formación del ingeniero.R. B. E. C. T., 5(3).

Camarena, P. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, 11(número especial), 397-424.

Canós, N. y Guitert, M. (2014). Uso de las TIC en la interacción profesor-alumno: un estudio de caso en una Escuela de Arte y Superior de Diseño. Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 13(1), 63 – 74. Recuperado de: http://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/relatec/article/view/1249

Coll, C. (2007). Tecnología y prácticas pedagógicas: las TIC como instrumento de mediación de la actividad conjunta de profesores y estudiantes. *Anuario de Psicología*, 38(3), 377-400.

Contreras, J. J., Hernández, J. L., Osorio, R. (2001). *La Problemática de las Matemáticas en la Enseñanza de la Ingeniería en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán*. 1er Foro La Enseñanza de las Matemáticas para Ingenieros. Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias/siete.pdf

Depool, R. A. (octubre, 2005). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS). *Números*, 62, 3-31.

Ferro, C., Martínez, A., Otero, M. (julio, 2009). Ventajas del uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Tecnología Educativa.* 29(7). Recuperado de: http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec29/

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. Revista Educación Matemática, 6(3), 37-51.

Pérez, M. T. y Arratia, O. (2013). *Integración analítica y numérica con Maple*. Universidad Overta de Cataluña. Recuperado de: http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/UV_Integracion.pdf

Ponce, J. C. y Rivera, A. (julio, 2011). Un análisis del uso de la tecnología para el cálculo de primitivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77(7), 85-98.

Quintero, D. (2010). *Inclusión de las TIC en la Educación Superior. Estudio de casos*. Cali, Colombia.: Universidad del Valle.

Rivera, M. (octubre-diciembre, 1990). La Enseñanza de las Ingenierías. Revista de la Educación Superior, 19(76). Recuperado de http://publicaciones.anuies.mx/revista/76

Soto, C. F. (julio, 2009). Ventajas del uso de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 29, 1-12.

Vega, L. R. (junio, 2013). La educación en ingeniería en el contexto global: propuesta para la formación de ingenieros en el primer cuarto de siglo del siglo XXI. *Ingeniería Investigación y Tecnología* 14(2), 177-190.

Zúñiga, L. (marzo, 2007). El cálculo en carreras de ingeniería. Un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10(1), 145-175.

ISSN: 2410-4000