

Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro

GARCÍA, José*†, RAMÍREZ, Luis, SIORDIA, Xóchitl, MARTÍNEZ, Trinidad

Recibido Abril 26 , 2016; Aceptado Octubre 5, 2016

Resumen

Este artículo expone el sustento teórico y metodológico de la aplicación de las leyes de la dinámica de Newton en el modelado y control de un sistema péndulo invertido sobre un carro. Se plantea la obtención de un modelo matemático para encontrar las ecuaciones que rigen la dinámica no lineal del sistema y una representación en espacio de estados usando el método de asignación de polos para el diseño del controlador. Para demostrar la no linealidad del sistema se desarrolló un algoritmo computacional utilizando la función ODE45 de MATLAB. La validación del controlador diseñado se realizó usando la planta rectilínea 210 de la compañía Educational Control Products (ECP) que forma parte del Laboratorio de Control del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) en Baja California México, comprobando su estabilidad sobre la vertical al implementar un diagrama de la planta y del controlador en Simulink/MATLAB. Los resultados demuestran que el método empleado en el diseño del controlador logra el objetivo de control. Este trabajo aporta una base teórica para el diseño de un controlador lineal aplicado a un sistema no lineal y también una metodología adaptable para el diseño de otro tipo de controladores lineales.

Modelo matemático, Péndulo Invertido, Diseño del controlador.

Abstract

This article exposes the theoretical and methodological support of the application of the laws of Newtonian dynamics in the modelling and control of an inverted pendulum system on a cart. It arise obtaining a mathematical model for find the equations governing the nonlinear dynamics of the system and a representation in the state space using the pole-placement method for controller design. The validation was performed of the controller designed using computational tool applied to the plant the rectilinear floor 210 of the Educational Company Control Products (ECP) with accessory inverted pendulum it is part of Control Laboratory of Ensenada Center for Scientific Research and Higher Education (CICESE) in Baja California, Mexico, proving its stability on vertical to implement a diagram of the plant and controller in Simulink / MATLAB. The results demonstrate that the method employed in the controller design achieves the control objective. This study provides a theoretical basis for the design of a linear controller applied to a nonlinear system and an adaptive methodology for designing other linear controllers.

Mathematical model, Inverted Pendulum, Controller Desig

Citación: GARCÍA, José, RAMÍREZ, Luis, SIORDIA, Xóchitl, MARTÍNEZ, Trinidad Las leyes de Newton en el modelado y control del péndulo invertido sobre un carro. Revista Tecnología e Innovación 2016. 3-9 : 11-19

*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: asoto110@gmail.com)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Introducción

Al intentar balancear el palo de una escoba sobre la palma de la mano se hace necesario ajustar constantemente el movimiento de la palma para lograr mantener al palo de la escoba sobre la vertical. En un sistema de péndulo invertido sucede básicamente lo mismo sólo que en nuestro caso su movimiento está restringido a dos dimensiones. El péndulo invertido constituye un exitoso banco de pruebas para la evaluación de una amplia gama de estrategias y métodos de control lineal y no lineal, la flexibilidad de su modelo matemático permite el diseño y validación de controladores óptimos y robustos aplicados al modelado de brazos robóticos de alta precisión, lanzadores de cohetes espaciales, controladores de despegue y aterrizaje vertical sólo por mencionar algunas aplicaciones (Reid, 2010). El sistema péndulo invertido sobre un carro (PIC), que se analiza en este artículo pertenece a la clase de los sistemas mecánicos subactuados los cuales tienen un número menor de entradas de control que grados de libertad. Este sistema consiste de una barra cilíndrica o plana (péndulo) de longitud ℓ con libertad de rotar 360° sobre su propio eje. Dicha barra se encuentra montada sobre un carro que se desplaza en una trayectoria lineal (Ogata, Dinámica de Sistemas, 1987). El PIC es considerado un sistema SIMO (Single Input, Multiple Output) el cual es inherentemente inestable, ya que al posicionar el péndulo con un ángulo menor o igual a 90° sobre la vertical superior, es imposible que permanezca recto, debido a que no existe alguna fuerza aplicada que lo mantenga sobre la vertical superior (Kurdekar & Borkar, 2013) (Warak, 2013). En este contexto el desarrollo de la metodología se centra en encontrar las ecuaciones que rigen el movimiento del PIC para así desarrollar un controlador por medio del espacio de estados que logre estabilizar el péndulo sobre la vertical en un tiempo $t > 0$.

La organización de este trabajo se presenta de la siguiente manera.

La sección 1 provee una breve introducción al estudio del péndulo invertido.

En la sección 2 se presenta el modelado matemático del péndulo invertido sobre un carro, derivando una representación en el espacio de estado y la metodología de diseño para el controlador.

En la sección 3, se presentan los parámetros utilizados para el diseño del controlador de la planta rectilínea 210 de la compañía Educational Control Products (ECP) con accesorio de péndulo invertido ECP-51 que forma parte del Laboratorio de Control del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) en Baja California, México. La cuarta sección presenta el desarrollo del diseño del controlador usando el método de asignación de polos. En la quinta sección se presenta el algoritmo en MATLAB para implementar una función ODE45 (ODE: Ordinary Differential Equations) basada en la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando el método de Runge-Kutta y la aplicación de Simulink del diagrama de bloques del sistema PIC, así como los resultados de la simulación.

La sección 6 presenta las conclusiones de este trabajo

Metodología

El sistema PIC se analiza a partir de la aplicación de las leyes de movimiento de Newton, donde las fuerzas y variables que actúan en el sistema se observan en la figura 1. Se considera la barra con masa despreciable y en su extremo superior se posiciona una masa (m) que oscila libremente alrededor de un pivote fijo (P) montado en el carro de masa (M) que se desplaza sobre una trayectoria lineal.

Los coeficientes de fricción del pivote y las ruedas se consideran despreciables (Ogata, Ingeniería de Control Moderna, 1998).

La Tabla 1 presenta una breve descripción de las variables del sistema PIC mostradas en la Figura 1, las cuales se utilizan en la obtención del modelo (García Martínez, 2015)

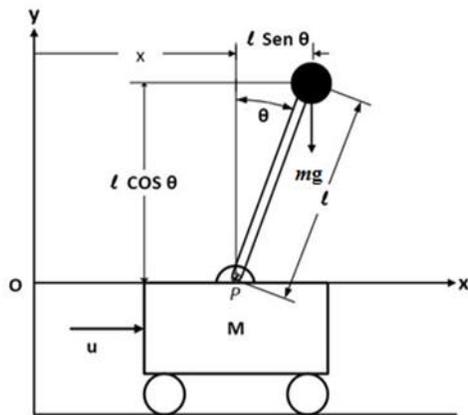


Figura 1 Sistema Péndulo Invertido sobre un Carro (PIC).

Símbolo	Descripción
M	Masa del carro
m	Masa del centro de gravedad
l	Longitud de la barra
I	Inercia del péndulo
u	Fuerza aplicada al carro
x	Posición del carro
θ	Ángulo del péndulo desde la vertical superior
g	Constante gravitacional
P	Pivote

Tabla 1 Simbología y breve descripción de las variables del sistema PIC.

Las ecuaciones (1) y (2) representan el punto $C_{cg}(x_{cg}, y_{cg})$ en el sistema de coordenadas cartesianas referentes al centro de gravedad del péndulo. La posición del centro de gravedad en el extremo del péndulo se obtiene a partir de la Figura 1.

$$x_{cg} = x + l \text{sen} \theta \quad (1)$$

$$y_{cg} = l \text{cos} \theta \quad (2)$$

Donde se observa que el carro de masa M se desplaza de forma horizontal sobre el eje x y al aplicar la segunda Ley de Newton en la dirección horizontal, se obtiene la ecuación del movimiento del sistema PIC, la cual queda definida por la ecuación (3).

$$M\ddot{x} + F_x = u(t) \quad (3)$$

Donde F_x representa el movimiento horizontal del péndulo y $u(t)$ representa la fuerza de entrada. Por otro lado, al aplicar la segunda Ley de Newton al movimiento rotacional con referencia al centro de gravedad C_{cg} del péndulo se obtiene la ecuación (4).

$$I\ddot{\theta} = F_y l \text{sen} \theta - F_x l \text{cos} \theta \quad (4)$$

Siendo I el momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad, F_x representa el movimiento horizontal del péndulo y F_y representa el movimiento vertical del mismo. El movimiento F_x , queda expresado por la ecuación (5).

$$F_x = m\ddot{x}_{cg} \quad (5)$$

La ecuación (5) depende de la abscisa x_{cg} del punto de coordenada del centro de gravedad C_{cg} , representada por la ecuación (1). El movimiento sobre el eje x del péndulo (6) se encuentra a partir de las ecuaciones (1) y (5), quedando expresada de la siguiente manera:

$$F_x = m\ddot{x} + m\ddot{a} \quad (6)$$

Se obtiene el término $\ddot{a} = \frac{d^2}{dt^2} \text{sen} \theta$ para simplificar (6).

$$a = (\text{cos} \theta)\ddot{\theta} - (\text{sen} \theta)\dot{\theta}^2 \quad (7)$$

$$F_x = m\ddot{x} + m l \ddot{\theta} \text{cos} \theta - m l \dot{\theta}^2 \text{sen} \theta \quad (8)$$

El movimiento vertical F_y del péndulo está representado en la ecuación (9) en donde se observa la relación de la ordenada del punto del centro de gravedad (y_{cg}) del péndulo.

$$F_y = m\ddot{y}_{cg} + mg \quad (9)$$

Relacionando las ecuaciones (2) y (9), se obtiene el movimiento vertical del péndulo (10):

$$F_y = m\ell\ddot{b} + mg \quad (10)$$

Siendo el término $\ddot{b} = \frac{d^2}{dt^2} \cos \theta$:

$$\frac{d^2}{dt^2} (\cos \theta) = (-\sin \theta)\ddot{\theta} - (\cos \theta)\dot{\theta}^2 \quad (11)$$

Con las ecuaciones (10) y (11) se obtiene la representación del movimiento vertical del péndulo (12):

$$F_y = -m\ell\ddot{\theta}\sin\theta - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta + mg \quad (12)$$

Usando las ecuaciones (4), (8) y (12), se representa el movimiento rotacional del péndulo (13):

$$I\ddot{\theta} = [-m\ell\ddot{\theta}\sin\theta - m\ell\dot{\theta}^2\cos\theta + mg]\ell\sin\theta - [m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta]\ell\cos\theta \quad (13)$$

Debido a que la masa (m) se encuentra posicionada en el extremo superior del péndulo, se puede suponer que el momento de inercia es igual a cero, es decir $I\ddot{\theta} = 0$ y manipulando algebraicamente la ecuación (13) ahora se expresa (14):

$$(mg\ell)\sin\theta = m\ell^2\ddot{\theta} + (mg\ddot{x})\cos\theta \quad (14)$$

La ecuación (14) representa el movimiento rotacional del péndulo. Para obtener la ecuación del movimiento traslacional del sistema PIC se relacionan las ecuaciones (3) y (8) obteniendo (15).

$$u(t) = (M + m)\ddot{x} - m\ell^2\dot{\theta}^2\sin\theta + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta = \quad (15)$$

El movimiento del sistema PIC está limitado a dos grados de libertad y su modelo matemático no lineal se representa por las ecuaciones (14) y (15). La expresión (16) representa las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales del sistema PIC en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} m\ell & m\cos\theta \\ m\ell\cos\theta & (M + m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg\sin\theta \\ u(t) + m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \end{bmatrix}$$

El objetivo de control para el sistema PIC es mantener el péndulo sobre la vertical. Considerando a θ y $\dot{\theta}$ pequeños, es posible linealizar las ecuaciones (14) y (15) al sustituir $\sin\theta = \theta$ y $\cos\theta = 1$ respectivamente, despreciándose el término $\theta\dot{\theta}^2$ de la ecuación (15) y con las expresiones anteriores se obtienen las ecuaciones (17) y (18).

$$mg\theta = m\ell\ddot{\theta} + m\ddot{x} \quad (17)$$

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u(t) \quad (18)$$

Se relacionan las ecuaciones (17) y (18) para obtener los términos \ddot{x} y $\ddot{\theta}$ respectivamente, y así se obtienen las ecuaciones (19) y (20).

$$\ddot{x} = -\frac{m}{M}g\theta + \frac{1}{M}u(t) \quad (19)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M - m)}{M\ell}g\theta - \frac{1}{M\ell}u(t) \quad (20)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación (20) se obtiene la función de transferencia del péndulo (21):

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = -\frac{1}{M\ell} \cdot \frac{1}{s^2 - g\frac{(M + m)}{M\ell}} \quad (21)$$

Una representación en el espacio de estados del sistema PIC se realiza con la asignación de las variables de estados en términos de θ y x :

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x} \tag{22}$$

Se sustituyen las variables de estado (22) en las ecuaciones (19) y (20), para obtener las ecuaciones (23) y (24):

$$\dot{x}_2 = \frac{(M+m)}{M\ell} g x_1 - \frac{1}{M\ell} u(t) \tag{23}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u(t) \tag{24}$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones de estado y salida del sistema PIC (25) y (26) respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g \frac{(M+m)}{M\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g \frac{m}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{M\ell} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \tag{26}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Figura 1

Controlador por Asignación de Polos

Para el diseño del controlador por asignación de polos es necesario demostrar que el sistema PIC es de estado completamente controlable, esto es posible resolviendo la ecuación (27) en donde $|M| \neq 0$:

$$M = [B : AB : \dots : A^{n-1}B] \tag{27}$$

Al demostrar que el sistema es controlable, se determinan los polos en lazo cerrado (28):

$$s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n \tag{28}$$

La ecuación característica de los polos en lazo cerrado se representa mediante la expresión (29)

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \tag{29}$$

El método para obtener los polos del controlador, es por medio de la Fórmula de Ackermann (30):

$$K = [0 \ 0 \dots \ 0 \ 1][B : AB : \dots : A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \tag{30}$$

Donde $\phi(A)$ es la ecuación de Cayley-Hamilton (31).

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I = 0 \tag{31}$$

La Figura 2 representa el controlador por medio del espacio de estados, se aprecia que u es retroalimentada por el controlador, la ecuación (32) se denomina ley de control:

$$u(t) = -Kx \tag{32}$$

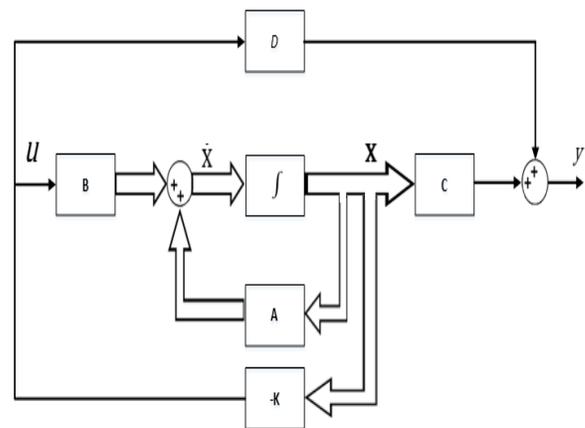


Figura 2 Diagrama de bloques del controlador.

Identificación de los Parámetros del Modelo

Los parámetros utilizados para el diseño del controlador y la validación del modelo se eligieron de la planta rectilínea 210 de la compañía Educational Control Products (ECP) con accesorio de péndulo invertido, se muestran en la Tabla 2. El manual de la planta hace referencia a un sistema subactuado que representa una planta rectilínea (masa-resorte-amortiguador, Modelo 210) mostrado en la Figura 2 y es ampliamente utilizada para la obtención de modelos matemáticos y simulación de los mismos, además presenta un accesorio de péndulo invertido desplazable de masa (m) mostrado en la Figura 3 que se ajusta a uno de los carros de masa (M) de la planta 210 (Bishop, 2010). Cada uno de los tres carros tiene un desplazamiento de $-3\text{ cm} \leq x \leq 3\text{ cm}$.

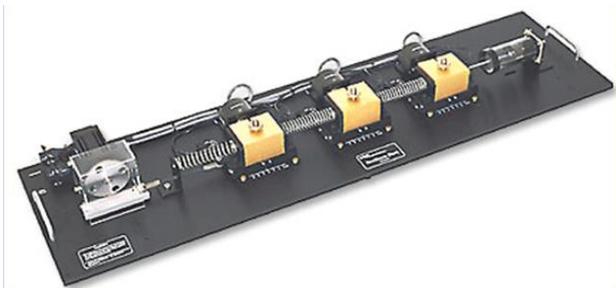


Figura 2 ECP Planta rectilínea, Modelo 210.



Figura 3 Accesorio ECP-51 Péndulo invertido para planta rectilínea modelo 210.

Parámetros	Valores Numéricos	Unidades
M	0.77	Kg
m	0.089	Kg
g	9.81	m/s ²
ℓ	0.32	m
t	13	Seg.

Tabla 2 Parámetros de la planta rectilínea modelo 210 con accesorio péndulo invertido ECP-51 para el sistema PIC.

Diseño del Controlador

Se sustituyen los parámetros de la Tabla 2 dentro de la ecuación de estado del sistema PIC (25):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 34.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.13 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4.05 \\ 0 \\ 1.3 \end{bmatrix} u(t) \quad (33)$$

Se demuestra que el sistema es de estado completamente controlable, sustituyendo los términos de la ecuación (33) dentro de la matriz de controlabilidad (27), al aplicar el determinante al resultado de la matriz de controlabilidad se obtiene $M = 2.59 \times 10^{-4}$ por lo que el sistema es controlable. En el diseño del controlador se propone la ubicación de los polos en $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 10$. La ecuación característica de los polos elegidos ecuación (34):

$$s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10000 = 0 \quad (34)$$

A partir de la ecuación característica, se aplica la fórmula de Ackermann para obtener la matriz de ganancias del controlador ecuación (35).

$$K = [-74.13 \quad 16.26 \quad 204.01 \quad 81.60] \quad (35)$$

Simulación y Resultados

En esta sección se realiza la simulación en el entorno computacional MATLAB/Simulink para presentar los resultados del PIC obtenidos mediante un algoritmo realizado en la versión R2013a y una representación del diagrama a bloques realizado en Simulink.

Se desarrolla el algoritmo en MATLAB para implementar una función ODE45 (ODE: Ordinary Differential Equations) basada en la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando el método de Runge-Kutta (RK) (Houcque) la cual resuelve la ecuación (16) que caracteriza el modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre el carro aplicando las leyes de movimiento de Newton.

Se utilizó un ángulo de 15° de separación entre el péndulo y la vertical superior y un tiempo de $0 \leq t \leq 13$ segundos que permite la correcta visualización del movimiento oscilatorio del péndulo. El Gráfico 1 muestra el comportamiento oscilatorio del péndulo cuando este se separa de la vertical superior. El sistema PIC es inestable en su totalidad hasta que el péndulo llega a la posición vertical inferior, la cual representa un punto de equilibrio.

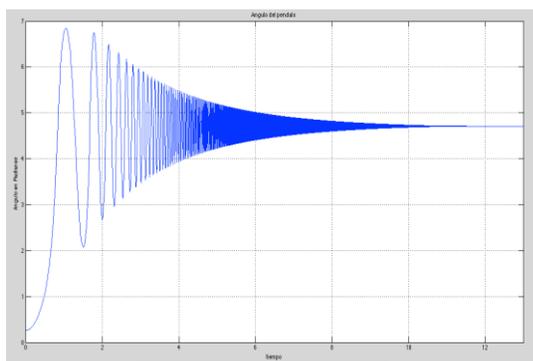


Gráfico 1 Simulación numérica en MATLAB del modelo no lineal observándose la oscilación con un ángulo de partida de 15° a partir de la vertical

En los Gráficos 2 y 3 se aprecia que el péndulo se estabiliza en un tiempo menor a 1.2 segundos con un intervalo de variación del ángulo de $-85^\circ \leq \theta \leq 85^\circ$ respecto de la vertical superior y con un desplazamiento del carro de $-2.8 \text{ cm} \leq x \leq 2.8 \text{ cm}$.

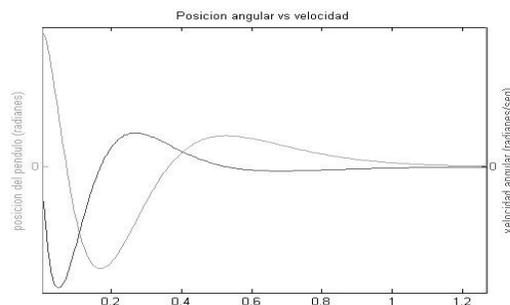


Gráfico 2 Respuesta del controlador de la posición y velocidad del péndulo.

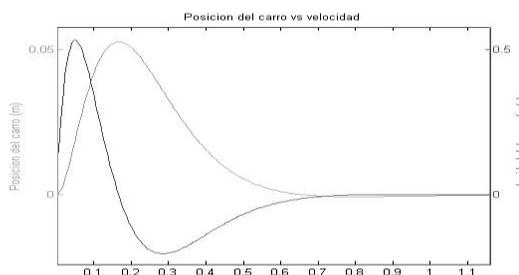


Gráfico 3 Respuesta del controlador de la posición y velocidad del carro.

La Figura 4 muestra el diagrama de bloques implementado en Simulink/Matlab para la planta y el controlador del PIC.

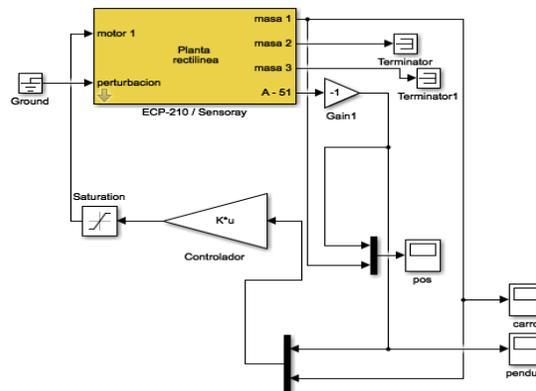


Figura 4 Diagrama en Simulink/Matlab para las pruebas experimentales realizadas en tiempo real con la planta y el controlador del PIC.

Los Gráficos 4 y 5 son el resultado del sistema en tiempo real del diagrama a bloques de la Figura 4.

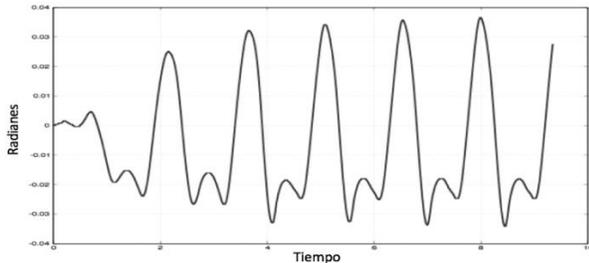


Gráfico 4 Respuesta en tiempo real de la velocidad del péndulo.

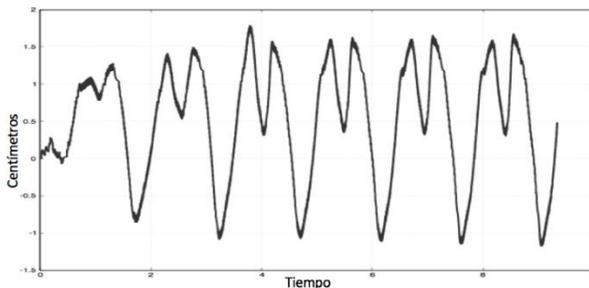


Gráfico 5 Respuesta en tiempo real de la velocidad del carro.

Conclusiones

En este artículo se obtuvieron las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales que caracterizan el modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre un carro (PIC) a partir del análisis y la aplicación de las leyes de la dinámica de Newton. Con el modelo matemático se demostró que el sistema es controlable lo que permitió diseñar el controlador por una representación en el espacio de estados con el método de asignación de polos logrando balancear y estabilizar el péndulo invertido sobre la vertical superior a un ángulo de $-5 \text{ grados} \leq \theta \leq 5 \text{ grados}$ y con un margen de desplazamiento del carro de $-2.8 \text{ cm} \leq x \leq 2.8 \text{ cm}$.

De todo lo mencionado en este artículo hay dos aspectos importantes, el primero es la investigación del péndulo invertido acerca de sus múltiples aplicaciones que existen y las ventajas de su estudio mediante los diferentes métodos y estrategias de la teoría de control lineal y no lineal, lo segundo, es que es posible afirmar que la retroalimentación por espacio de estados puede controlar cualquier aproximación lineal de un modelo matemático no lineal, lo que permite demostrar que el péndulo llega al punto de estabilización lográndose mantener sobre la vertical superior. Por lo tanto se proporciona la base teórica para el diseño de un controlador lineal del sistema péndulo invertido inherentemente no lineal, y en consecuencia este método también podrá ser adaptable al diseño de otros tipos de controladores lineales aplicados a otros sistemas no lineales.

Agradecimiento

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) en Baja California México por el apoyo prestado en la realización experimental y validación del diseño del controlador del sistema péndulo invertido sobre un carro (PIC).

El primer autor agradece a la Facultad de Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones de la Universidad Veracruzana por todo el apoyo brindado a esta investigación.

Referencias

- Bishop, R. (2010). *Control System Laboratory*. Houston, Texas: Rice University .
- García Martínez, J. R. (2015). *Análisis y Diseño de un Controlador para un Péndulo Invertido Usando los Métodos de Espacio de Estados*. Poza Rica, Ver.: Universidad Veracruzana

Houcque, D. (n.d.). *Applications of MATLAB: Ordinary Differential Equations (ODE)*. Evanston: Robert R. McCormick School of Engineering .

Kurdekar, V., & Borkar, S. (2013, Sep-Oct). *Inverted Pendulum Control: A Brief Overview*.

Ogata, K. (1987). *Dinámica de Sistemas*. Distrito Federal: Prentice Hall

Ogata, K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna*. Distrito Federal: Prentice Hall.

Reid, K. (2010). *Fuzzy Logic of an Inverted Pendulum Robot*. San Luis Obispo: California Polytechnic State University.

Warak, P. (2013, April). *Mathematical Modelling of Inverted Pendulum with Disturbance Input*.