

Análisis numérico del flujo asimétrico variando la posición axial del impulsor

LIZARDI, Arturo†*, LÓPEZ, Raymundo, TERRES, Hilario y MORALES, Juan.

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco, Avenida San Pablo Xalpa 180, Azcapotzalco, Reynosa Tamaulipas, 02200 Ciudad de México, CDMX, México

Recibido Octubre 7, 2016; Aceptado Noviembre 16, 2016

Resumen

Se presenta el análisis numérico de la función corriente (Ψ) y de las componentes de velocidad radial (u) y axial (w) originadas por el movimiento de un fluido incompresible que gira en el interior de un depósito cilíndrico cerrado y que es producido por un disco impulsor. Se modelan y resuelven las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento en estado permanente. Los resultados son para un radio del impulsor, ocho posiciones del mismo sobre el eje axial y dos tipos de fluido: agua y gasolina, que corresponden a un Reynolds de 2.74×10^4 y 0.63×10^4 , respectivamente. Algunos resultados muestran que el flujo se compone de dos zonas: una que gira en sentido horario, ubicada por debajo del disco rotatorio, y otra que gira en sentido anti horario, ubicada por encima del mismo. Al variar la posición axial del impulsor de manera ascendente, sobre el eje del cilindro, se encontró que: la componente de velocidad radial positiva (u) disminuyó 24.94% para $Re=2.74 \times 10^4$ y 10.99% para $Re=0.63 \times 10^4$; la componente de velocidad axial positiva (w), por debajo del disco giratorio, disminuyó 22.85% y 28.55%, para los mismos Reynolds; y la componente de velocidad axial positiva (w), por encima del impulsor, aumentó 105.3% y 118.30%, para los mismos Reynolds.

Flujo asimétrico, líneas de corriente, velocidad radial y axial.

Abstract

In this work the streamlines, the velocity components radial (u) and axial (w) produced by the moving of a fluid inside a closed cylindrical deposit with a rotating impeller are obtained by a numerical methods. The equations of continuity and conservation of momentum steady state for an incompressible fluid are modeled and solved numerically together with the appropriate boundary conditions. The results for a radius of the impeller, eight positions thereof on the axial axis and two different fluids, water and gasoline, are presented. The corresponding Reynolds number for the physical situation is: 2.74×10^4 and 0.63×10^4 respectively. Some results indicate that the flow structure presents two zones; the one located underneath the impeller rotates clockwise, whereas the one located above de impeller moves counter-clockwise. By varying the axial position of impeller ascending manner on the cylinder axis, it was found that: the positive radial velocity component (u) decreased 24.94% for $Re=2.74 \times 10^4$ and 10.99% for $Re=0.63 \times 10^4$; the positive axial velocity component (w) underneath of the impeller decreased 22.85% and 28.55% for the same Reynolds numbers; and the positive axial velocity component (w) above the impeller increased 105.3% and 118.30% for the same Reynolds numbers.

Asymmetric flow, streamlines, radial and axial velocity.

Citación: LIZARDI, Arturo, LÓPEZ, Raymundo, TERRES, Hilario y MORALES, Juan. Análisis numérico del flujo asimétrico variando la posición axial del impulsor. Revista de Aplicaciones de la Ingeniería 2016, 3-9: 59-71

*Correspondencia al Autor: (Correo Electrónico: arlr@correo.azc.uam.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

Nomenclatura

i	punto discreto en la dirección radial
j	punto discreto en la dirección axial
g	aceleración gravitatoria (m/s^2)
Renúmero de Reynolds	
r	coordenada radial adimensional
z	coordenada axial adimensional
Δr	espacio de la malla en dirección radial
Δz	espacio de la malla en dirección axial
u	componente de velocidad radial adimensional
v	componente de velocidad tangencial adimensional
w	componente de velocidad axial adimensional
P	presión [Pa]
R	coordenada radial dimensional [m]
Z	coordenada axial dimensional [m]
U	componente de velocidad radial [m/s]
V	componente de velocidad tangencial [m/s]
W	componente de velocidad axial [m/s]
γ	función circulación dimensional [m^2/s]
ζ	función vorticidad dimensional [1/s]
ψ	función corriente dimensional [m^3/s]
ν	viscosidad cinemática [m^2/s]
ρ	densidad [kg/m^3]
Ω	velocidad angular del impulsor [rad/s]
Γ	función circulación adimensional
ξ	función vorticidad adimensional
Ψ	función corriente adimensional

Introducción

El flujo rotatorio confinado en una cámara cilíndrica vertical, que es generado por un impulsor radial, es importante por las diversas aplicaciones prácticas que tiene en el campo de la ingeniería y por el análisis teórico que presenta al resolver sus ecuaciones rectoras. Entre las aplicaciones prácticas se pueden mencionar el flujo en maquinaria centrífuga tal como bombas y compresores, cámaras de mezclado, aireadores tipo turbina para plantas de tratamiento de agua, etc.

Las expresiones matemáticas que describen el comportamiento dinámico del flujo rotatorio parten de las ecuaciones de Navier-Stokes, ecuación diferencial parcial no lineal y elíptica. La no linealidad y el acoplamiento de sus términos hacen que su solución sea compleja. La característica de segundo grado de la ecuación de Navier-Stokes, genera problemas de implementación de las condiciones de frontera para definir el problema en estudio. Las primeras derivadas restringen el uso de aproximaciones de bajo orden debido a la difusión numérica. Adicionalmente el relevante comportamiento elíptico de las ecuaciones para fluidos incompresibles, complican la determinación del campo de presiones que definen la correcta descripción del flujo. Por ello la simulación numérica, al paso del tiempo, se ha desarrollado ampliamente.

El objetivo de este trabajo es conocer la estructura del movimiento de un fluido viscoso, incompresible, en el interior de un recipiente cilíndrico vertical, movimiento que se genera por un disco rotatorio. Las ecuaciones de continuidad y de conservación de la cantidad de movimiento se expresan y resuelven en función de la vorticidad, la circulación y la función de corriente meridional. Los resultados obtenidos permiten describir el movimiento radial y axial del fluido girando en el interior de la cámara cilíndrica, en términos del número de Reynolds, y el factor de forma, dado por la relación alto/radio del recipiente. Se analiza el campo de la función corriente meridional (Ψ) y las componentes de velocidad radial (u) y axial (w) para un radio del impulsor, ocho posiciones del mismo sobre el eje axial y dos tipos de fluido: agua y gasolina que, de acuerdo a la situación física del problema, corresponden a un número de Reynolds de 2.74×10^4 y 0.63×10^4 , respectivamente.

Algunos trabajos reportados en la literatura sobre el flujo rotatorio, desde el punto de vista numérico, son: Pao H-P [1] propuso un método numérico para estudiar un fluido viscoso incompresible confinado en una cámara cilíndrica donde la tapa superior está rotando a una velocidad angular constante y las paredes y fondo del recipiente permanecen fijos. Se analiza la función corriente y circulación, la distribución de velocidades y el coeficiente de par para un rango del número de Reynolds de 1 a 400. Bertelá y Gori [2] presentaron un método numérico que permite resolver el flujo estable y transitorio de un fluido dentro de una cámara cilíndrica con la cubierta rotando. En el estudio se analizan las componentes de velocidad, líneas de corriente y coeficiente de torque para un número de Reynolds de 100 y 1000, y para una relación geométrica de 0.5, 1 y 2. Lang *et al.* [3] estudiaron numéricamente el flujo laminar estable en un cilindro fijo con un disco rotando en la tapa superior. El trabajo resalta el análisis del coeficiente de torque y de los flujos volumétricos primario y secundario para un rango del número de Reynolds de 1 a 10^5 y para una relación geométrica de 0.02 a 3. Valentine, D. T. y Jahnke, C. C. [4] describieron el campo de flujo dentro de un contenedor cilíndrico inducido por la rotación de las tapas superior e inferior, manteniendo la pared lateral fija. En el trabajo se demuestra que se generan puntos de estancamiento a lo largo del eje de rotación entre el plano medio de simetría y las tapas en rotación. Las relaciones geométricas analizadas fueron 0.5, 0.8, 1.0, y 1.5, se examinaron en un intervalo de números de Reynolds de 100 a 2000. Khalili *et al.* [5] proveyeron una solución numérica para un flujo laminar inducido por un disco rotatorio situado asimétricamente respecto a la altura, dentro de un cilindro.

Presentaron el análisis de las líneas de corriente y componentes de velocidad tangencial así como el coeficiente de torque para los distintos posicionamientos del disco para una relación geométrica de 1 a 2 y un rango de números de Reynolds de 1 a 5000. Yu P., *et al.* [6] estudiaron numéricamente el flujo en una cámara cilíndrica cerrada con un disco giratorio en el fondo y cuyo radio es menor al de la cámara. El comportamiento del flujo se investigó para una amplia gama de parámetros. Se analizaron, en el plano meridional, las líneas de corriente, momento angular y vorticidad, para diferentes Reynolds (1000, 1500 y 2000), relación geométrica H/R (1.5) y relación de radios R/rd (1.5, 1.8, 2.0, 2.2, 2.6, 3.0, 5.0). Sturzenegger J. C., *et al.* [7] estudiaron el flujo axisimétrico dentro de un recipiente cilíndrico con una varilla a lo largo de su eje de simetría. El flujo se produce por la rotación de uno de los extremos del cilindro, de ambos extremos, o de la pared lateral. Se presentan expresiones analíticas (para números de Reynolds bajos) del campo de velocidad azimutal, extendiendo la solución para el caso sin varilla.

Modelo Físico

El sistema a estudiar consiste en un recipiente cilíndrico cerrado de 0.045 m de radio y 0.09 m de altura, que tiene un disco impulsor de 0.005 m de espesor y 0.035 m de radio, y cuya posición vertical se variará en ocho posiciones distintas sobre el eje de la cámara. El impulsor se sujeta, desde la parte superior, por medio de un eje de 0.01 m de radio, que gira a una velocidad angular constante de 13.61 rad/s. En el interior del depósito se tiene un fluido viscoso e incompresible de propiedades físicas constantes, Fig.1.

Planteamiento Matemático

El modelo matemático que describe el flujo axisimétrico en estado permanente de un fluido viscoso, incompresible, que gira en el interior de un recipiente cilíndrico, se expresa a través de las ecuaciones continuidad y conservación la cantidad de movimiento en coordenadas polares cilíndricas (R, Φ, Z) [8].

$$\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{V^2}{R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial R} + v \left[\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{U V}{R} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = v \left[\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (3)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + v \left[\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right] - g \quad (4)$$

En este sistema de ecuaciones dimensionales las incógnitas son las tres componentes de velocidad (U, V, W) y la presión (P).

Pero se tiene el problema de que la presión en cualquier punto del fluido depende de las componentes de velocidad. Para salvar esta dificultad, eliminando el término de la presión, se hace una transformación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en función de la vorticidad (ζ), circulación (γ) y función corriente meridional (ψ). Una vez hecha la transformación de las ecuaciones, éstas se adimensionalizan, discretizan y resuelven. La forma adimensional

$$u \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + w \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 \Gamma - \frac{2}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right] \quad (5)$$

resultante es [1]

$$u \frac{\partial \xi}{\partial r} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{u \xi}{r} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial (\Gamma^2)}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla^2 \xi - \frac{\xi}{r^2} \right] \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \xi \quad (7)$$

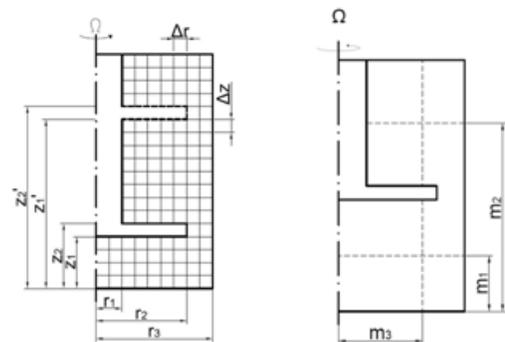


Figura 1 Representación física del sistema a analizar, malla generada y ejes de referencia para el análisis

Los parámetros que relacionan las variables adimensionales ($r, z, u, v, w, \Psi, \Gamma, \xi$) con las dimensionales ($R, Z, U, V, W, \psi, \gamma, \varsigma$) están definidos por las siguientes ecuaciones [8, 9]

$$\begin{aligned} \frac{R}{r_3} = r, \quad \frac{Z}{r_3} = z, \quad \frac{U}{\Omega r_3} = u, \quad \frac{V}{\Omega r_3} = v, \\ \frac{W}{\Omega r_3} = w, \quad \frac{\Psi}{\Omega r_3^3} = \Psi, \quad \frac{\gamma}{\Omega r_3^2} = \Gamma, \\ \frac{\varsigma}{\Omega} = \xi, \quad Re = \frac{\Omega r_3^2}{\nu} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \gamma = 2\pi VR, \quad \varsigma = \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial R}, \\ U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad W = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \end{aligned} \quad (9)$$

En donde r_3 es el radio interior del recipiente, Ω es la velocidad angular del impulsor y Re es el número de Reynolds definido para este sistema. Las ecuaciones de transporte de la circulación (5) y de la vorticidad tangencial (6) son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales de tipo parabólico. La ecuación de Poisson para la función corriente meridional (7) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo elíptico [10]. Las condiciones de frontera son [11]

$$\begin{aligned} r = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = 0 \\ 0 \leq z \leq z_1 \\ r = r_3, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \\ 0 \leq z \leq z_3 \\ z = z_1, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = r^2, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ 0 \leq r \leq r_2 \\ z = z_2, \\ r_1 \leq r \leq r_2 \\ z_1 \leq z \leq z_2 \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = r^2, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \\ r = r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 \leq z \leq z_3, \\ r = r_1, \\ z = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ 0 \leq r \leq r_3 \\ z = z_3, \\ r_1 \leq r \leq r_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Solución numérica

Para resolver las ecuaciones que rigen en el interior del sistema (5), (6) y (7), junto con las condiciones de frontera (10), es necesario transformarlas a un espacio discreto, el cual es el espacio manejado por las computadoras. En el método numérico se aplica un esquema de diferencias finitas para reemplazar las ecuaciones diferenciales parciales por expresiones algebraicas aproximadas. La aproximación empleada en el método numérico para las ecuaciones que rigen en el depósito y las fronteras del mismo son de segundo y cuarto orden, respectivamente. En la Fig. 1 se representa la malla en el plano meridional continuo (r, z) para el flujo axisimétrico. Las ecuaciones en diferencias finitas que rigen el movimiento del fluido en el interior del sistema se muestran en la referencia [12].

Para obtener los campos de las funciones corriente meridional (Ψ), circulación (Γ) y vorticidad tangencial (ξ) se elaboró un programa de cómputo en lenguaje de programación C++. El programa realiza el mallado en el plano (r, z), aplica las ecuaciones (5), (6) y (7), en diferencias finitas, a cada nodo interno del sistema y las ecuaciones (10), previamente discretizadas, a cada nodo ubicado en la frontera del mismo. Posteriormente, por medio de una subrutina, resuelve el sistema de ecuaciones en forma iterativa hasta encontrar la convergencia.

El criterio de convergencia utilizado es del tipo de error relativo, de la forma: $\max \left[\frac{\Psi^{\sigma+1} - \Psi^{\sigma}}{\Psi^{\sigma}} \right] < \varepsilon$. El orden de precisión de ε , en este trabajo, fue de 0.0001. Para determinar las componentes de velocidad radial (u) y axial (w), se adimensionalizan y discretizan las ecuaciones que definen a la función corriente (9), y se emplean los resultados obtenidos en el sistema de ecuaciones anterior. Las expresiones resultantes en diferencias finitas son:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{\Psi_{i,j-2} - 8\Psi_{i,j-1} + 8\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j+2}}{12 \Delta r \Delta z i}; \\ w_{i,j} &= \frac{\Psi_{i+2,j} - 8\Psi_{i+1,j} + 8\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i-2,j}}{12 \Delta r^2 i} \end{aligned} \quad (11)$$

Resultados y discusión

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones junto con las condiciones de frontera se hicieron corridas para dos tipos de fluido: agua y gasolina que, junto con la geometría del sistema, corresponden a un número de Reynolds de 2.74×10^4 y 0.63×10^4 , respectivamente. El sistema se acotó con los siguientes valores: $r_1=0.01$ m, $r_2=0.035$ m, $r_3=0.045$ m, $z_3=0.09$ m, $z_2=z_1+0.005$ m y $\Omega=13.61$ rad/s. La posición del impulsor, z_1 , se varió en ocho posiciones distintas sobre el eje axial. La distribución de las líneas de corriente (Ψ), para los dos fluidos, se muestran en las Figs. 2 y 3.

En la Fig. 2, sistema con número de Reynolds 2.74×10^4 y posición del impulsor z_1 de 0.01, 0.05, y 0.075 m, se observa que las partículas de fluido son impulsadas por el disco hacia la pared del recipiente.

Al acercarse a ella el flujo generado se divide en dos: una parte se dirige hacia la zona inferior del depósito, formando una circulación en sentido horario, y otra parte se dirige hacia la zona superior del cilindro, formando una circulación en sentido anti horario. El campo de la función corriente muestra que lejos de los núcleos formados el flujo volumétrico va disminuyendo, haciéndose presente la condición de frontera de gasto cero en las paredes de la cámara, eje de rotación, fondo del depósito y superficie rígida. Los valores máximos que toma la función corriente en los núcleos, para el flujo horario (+) y anti horario (-), para Reynolds 2.74×10^4 y para ocho posiciones en el eje axial se presentan en la Tabla 1.

Los resultados indican que el valor máximo de la función corriente meridional, para el flujo horario (+), se va reduciendo conforme el impulsor va ascendiendo sobre el eje axial, alcanzando una magnitud máxima y mínima de 0.1336 y 0.1011, respectivamente, es decir hay un decremento del 24.33%. Lo anterior es debido a que cuando el disco giratorio se encuentra en la parte inferior, las partículas de fluido ubicadas por debajo del mismo se distribuyen en un área pequeña, provocando que la cantidad de movimiento que traen consigo se manifieste en un valor más alto del flujo volumétrico. Por otro lado, cuando el disco rotatorio se encuentra en la parte superior de la cámara, el flujo se distribuye en una zona más grande, provocando un descenso del flujo de volumen. Este mismo fenómeno se manifiesta para el flujo anti horario (-), pero de manera inversa.

Es decir, cuando el impulsor se encuentra en la parte inferior, el flujo por encima del mismo se distribuye en un área mayor y el gasto volumétrico es pequeño, y cuando el disco se encuentra en la parte superior, el flujo se distribuye en una zona menor y el gasto de volumen es grande. Las magnitudes mínima y máxima, para el flujo anti horario (-), son -0.1027 y -0.1774, respectivamente, es decir hay un incremento del 72.74%.

La disminución del valor de la función corriente respecto al caso anterior es consecuencia del incremento de la viscosidad cinemática del fluido.

Posición z_1 (m)	Agua		Gasolina	
	$\Psi_{\text{máx}} (+)$	$\Psi_{\text{máx}} (-)$	$\Psi_{\text{máx}} (+)$	$\Psi_{\text{máx}} (-)$
0.01	0.1336	-0.1027	0.1327	-0.0941
0.02	0.1191	-0.1042	0.1163	-0.0965
0.03	0.1130	-0.1090	0.1085	-0.1013
0.04	0.1075	-0.1155	0.1021	-0.1084
0.05	0.1033	-0.1259	0.0972	-0.1187
0.06	0.1026	-0.1481	0.0944	-0.1335
0.07	0.1018	-0.1716	0.0923	-0.1546
0.075	0.1011	-0.1774	0.0915	-0.1693

Tabla 1 Función corriente meridional en los núcleos para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua) y $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina)

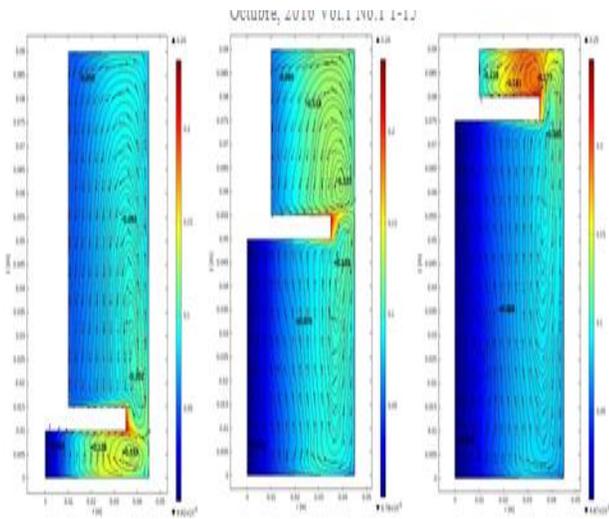


Figura 2 Líneas de función corriente adimensional (Ψ) para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua) y posiciones del impulsor z_1 de 0.01, 0.05, y 0.075 m.

El comportamiento para el sistema con número de Reynolds 0.63×10^4 , Fig. 3, es parecido aunque con magnitudes menores. Para este caso el valor máximo y mínimo que toma la función corriente, Tabla 1, para el flujo horario (+), es 0.1327 y 0.0915, es decir hay un decremento del 31.05%. Por otro lado la magnitud mínima y máxima, para el flujo anti horario (-), es -0.0941 y -0.1693, es decir hay un incremento del 79.91%. En este caso los resultados también muestran que cambiar el impulsor de posición vertical de manera ascendente, el flujo volumétrico disminuye para el caso horario (+) y aumenta para el caso anti horario (-).

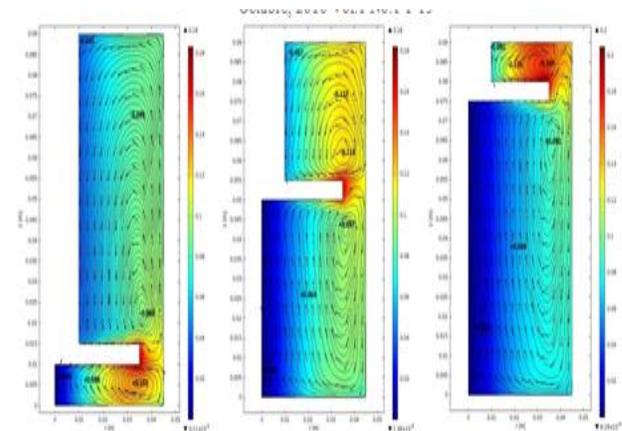


Figura 3 Líneas de función corriente adimensional (Ψ) para $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina) y posiciones del impulsor z_1 de 0.01, 0.05, y 0.075 m

En la Fig. 4, se muestra el comportamiento de la componente de velocidad radial (u) al variar “z”, para un Reynolds de 2.74×10^4 , en un radio de referencia $m_3=0.03$ m y en ocho ubicaciones del impulsor (z_1). Se precia para $z_1=0.01$ m que la componente de velocidad radial comienza en cero debido a la condición de frontera de no deslizamiento que hay sobre el fondo del depósito.

Posteriormente se observa la zona de la capa límite hidrodinámica donde el flujo se dirige horizontalmente hacia la pared del recipiente, esto se indica por el signo positivo de la velocidad. Se aprecia que el valor de la velocidad radial va aumentando hasta un máximo positivo de 9.66×10^{-3} y de allí comienza a disminuir hasta cero, al situarse sobre el disco rotatorio. Posteriormente se observa una zona con velocidad cero, que es la parte que ocupa el impulsor. A partir de este punto, se aprecia la zona de la otra capa límite hidrodinámica donde ahora el flujo se dirige hacia el eje del sistema, esto se indica por el signo negativo de la velocidad. En esta parte se observa que la velocidad radial va aumentando hasta un máximo negativo de -6.70×10^{-3} y de allí nuevamente disminuye su magnitud hasta llegar a cero, cuando se ubica sobre la tapa del cilindro. Para las otras posiciones del disco giratorio se tiene el mismo comportamiento pero con valores distintos. Las magnitudes máximas positivas y negativas para ocho ubicaciones del impulsor se muestran en la Tabla 2.

Los resultados indican que el valor máximo positivo de la componente de velocidad radial (u), para el radio de referencia de $m_3=0.03$ m y las ocho posiciones de z_1 , se va reduciendo conforme el disco giratorio va ascendiendo sobre el eje axial, alcanzando una magnitud máxima y mínima de 9.66×10^{-3} y 7.25×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un decremento del 24.94%. Lo anterior es debido a que el centro de los núcleos positivos de las líneas de corriente también reduce su valor al variar de manera ascendente la posición axial del impulsor.

Para el número de Reynolds de 0.63×10^4 , Fig. 5, se aprecia el mismo comportamiento pero con magnitudes distintas, en este caso los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad radial para $z_1=0.01$ m son de 7.82×10^{-3} y -6.90×10^{-3} . En la Tabla 2 se muestran los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad radial para otras posiciones del disco giratorio (z_1). Los resultados indican, como en el caso anterior, que el valor máximo positivo de la componente de velocidad radial (u), se va reduciendo conforme el impulsor va ascendiendo sobre el eje axial. Para este caso la magnitud máxima y mínima es de 7.82×10^{-3} y 6.96×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un decremento del 10.99%. Finalmente, al tomar como referencia el número de Reynolds de 2.74×10^4 y compararlo con el de 0.634×10^4 , se encontró que los valores máximos positivos de la componente de velocidad radial (u) se redujeron en promedio 10.83%.

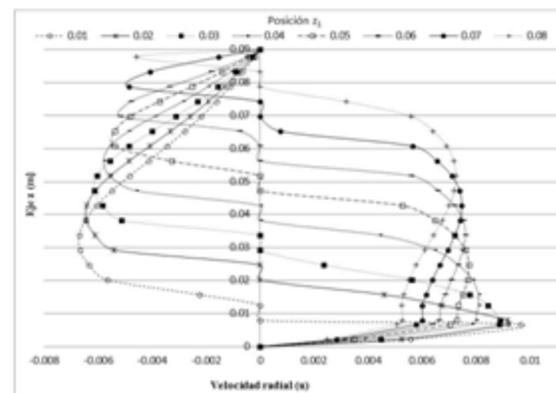


Figura 4 Componente de velocidad radial (u) para $Re=2.74 \times 10^4$ y distintas posiciones del impulsor (z_1)

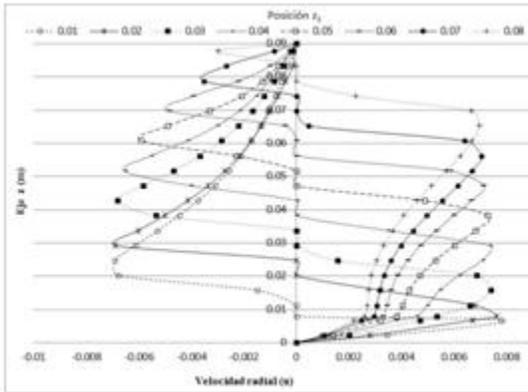


Figura 5 Componente de velocidad radial (u) para $Re=0.63 \times 10^4$ y distintas posiciones del impulsor (z_1)

Posición z_1 (m)	$u_{\text{máx}} (+)$ Agua	$u_{\text{máx}} (-)$ Agua	$u_{\text{máx}} (+)$ Gasolina	$u_{\text{máx}} (-)$ Gasolina
0.01	9.66×10^{-3}	-6.70×10^{-3}	7.82×10^{-3}	-6.90×10^{-3}
0.02	9.23×10^{-3}	-6.44×10^{-3}	7.63×10^{-3}	-6.88×10^{-3}
0.03	8.91×10^{-3}	-6.15×10^{-3}	7.41×10^{-3}	-6.80×10^{-3}
0.04	8.10×10^{-3}	-5.80×10^{-3}	7.36×10^{-3}	-6.55×10^{-3}
0.05	7.74×10^{-3}	-5.39×10^{-3}	7.28×10^{-3}	-5.91×10^{-3}
0.06	7.61×10^{-3}	-5.17×10^{-3}	7.13×10^{-3}	-4.86×10^{-3}
0.07	7.48×10^{-3}	-4.85×10^{-3}	7.05×10^{-3}	-3.51×10^{-3}
0.08	7.25×10^{-3}	-4.58×10^{-3}	6.96×10^{-3}	-2.97×10^{-3}

Tabla 2 Componente de velocidad radial (u) máxima para distintas ubicaciones del impulsor (z_1), para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua) y $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina)

En la Fig. 6, se muestran los resultados de la componente de velocidad axial (w) al variar “ r ”, para un Reynolds de 2.74×10^4 , en una posición axial de referencia dada por $m_1=(z_1/2)$ m y distintas ubicaciones del impulsor (z_1). Para $z_1=0.01$ m se aprecia que la componente de velocidad vertical comienza en cero sobre el eje de simetría, posteriormente se observa la zona de la capa límite hidrodinámica donde el flujo se dirige verticalmente hacia el disco giratorio, esto se indica por el signo positivo de la velocidad. Se aprecia que el valor de la velocidad axial va aumentando hasta un máximo positivo de 9.45×10^{-3} y de allí comienza a disminuir hasta cero, donde a partir de este punto se presenta un cambio en el sentido del flujo.

A partir de allí se observa la zona de la otra capa límite hidrodinámica donde ahora el flujo se dirige hacia el fondo del sistema, esto se indica por el signo negativo de la velocidad. En esta parte se aprecia que la velocidad vertical va aumentando hasta un máximo negativo de -21.35×10^{-3} y de allí nuevamente disminuye su magnitud hasta llegar a cero cuando se ubica sobre la pared del cilindro. Para las otras posiciones del disco rotatorio se tiene el mismo comportamiento pero con valores distintos. Las magnitudes máximas positivas y negativas para ocho ubicaciones del impulsor se muestran en la Tabla 3.

Los resultados indican que el valor máximo positivo de la componente de velocidad axial (w), para la posición vertical de referencia dada por $m_1=(z_1/2)$ m y las ocho posiciones de z_1 , se va reduciendo conforme el disco giratorio va ascendiendo sobre el eje axial, alcanzando una magnitud máxima y mínima de 9.45×10^{-3} y 7.29×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un decremento del 22.85%. Lo anterior es debido a que, como en el caso de la componente radial (u), el centro de los núcleos positivos de las líneas de corriente también reduce su valor al variar de manera ascendente la posición axial del disco giratorio.

Para el número de Reynolds de 0.63×10^4 , Fig. 7, se aprecia el mismo comportamiento pero con magnitudes distintas, en este caso los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad axial para $z_1=0.01$ son de 8.30×10^{-3} y -12.76×10^{-3} . En la Tabla 3 se muestran los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad axial para otras posiciones del disco giratorio (z_1).

Los resultados indican, como en el caso anterior, que el valor máximo positivo de la componente de velocidad axial (w), se va reduciendo conforme el impulsor va ascendiendo sobre el eje vertical. Para este caso la magnitud máxima y mínima es de 8.30×10^{-3} y 5.93×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un decremento del 28.55%. Finalmente, al tomar como referencia el número de Reynolds de 2.74×10^4 y compararlo con el de 0.634×10^4 , se encontró que los valores máximos positivos de la componente de velocidad axial (w) se redujeron en promedio 14.30%.

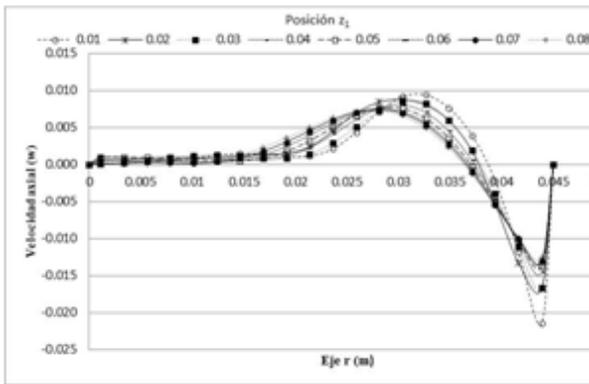


Figura 6 Componente de velocidad axial (w) para $Re=2.74 \times 10^4$, y distintas posiciones del impulsor (z_1)

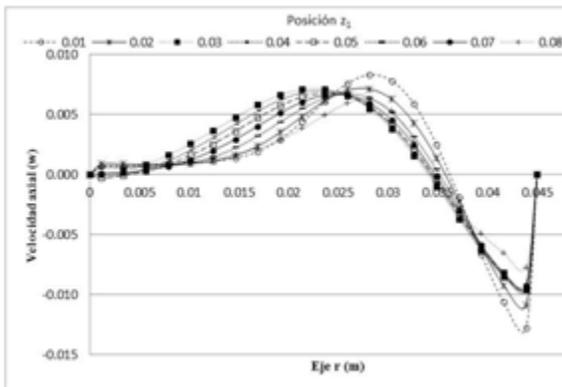


Figura 7 Componente de velocidad axial (w) m para $Re=0.63 \times 10^4$, y distintas posiciones del impulsor (z_1)

Posición z_1 (m)	$w_{m\acute{a}x}$ (+) Agua	$w_{m\acute{a}x}$ (-) Agua	$w_{m\acute{a}x}$ (+) Gasolina	$w_{m\acute{a}x}$ (-) Gasolina
0.01	9.45×10^{-3}	-21.35×10^{-3}	8.30×10^{-3}	-12.76×10^{-3}
0.02	8.79×10^{-3}	-16.67×10^{-3}	7.13×10^{-3}	-10.83×10^{-3}
0.03	8.64×10^{-3}	-16.57×10^{-3}	7.12×10^{-3}	-9.60×10^{-3}
0.04	8.07×10^{-3}	-14.50×10^{-3}	6.99×10^{-3}	-9.48×10^{-3}
0.05	7.65×10^{-3}	-13.65×10^{-3}	6.81×10^{-3}	-9.31×10^{-3}
0.06	7.52×10^{-3}	-13.13×10^{-3}	6.74×10^{-3}	-9.14×10^{-3}
0.07	7.49×10^{-3}	-13.02×10^{-3}	6.63×10^{-3}	-8.93×10^{-3}
0.08	7.29×10^{-3}	-12.56×10^{-3}	5.93×10^{-3}	-7.72×10^{-3}

Tabla 3 Componente de velocidad axial (w) máxima para distintas ubicaciones del impulsor, para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua) y $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina)

En la Fig. 8, se muestran los resultados de la componente de velocidad axial (w) al variar "r", para un Reynolds de 2.74×10^4 , en una posición axial de referencia dada por $m_2 = (z_1 + 0.005) + (z_3 - z_2) / 2$ y distintas ubicaciones del impulsor (z_1). Para $z_1 = 0.01$ m se aprecia que la componente de velocidad vertical comienza en cero sobre el eje del disco rotatorio, posteriormente se observa la zona de la capa límite hidrodinámica donde el flujo se dirige verticalmente hacia el disco giratorio, esto se indica por el signo negativo de la velocidad. Se aprecia que el valor de la velocidad axial va aumentando hasta un máximo negativo de -3.80×10^{-3} y de allí comienza a disminuir hasta llegar a cero, donde a partir de este punto se presenta un cambio en el sentido del flujo. A partir de allí se observa la zona de la otra capa límite hidrodinámica donde ahora el flujo se dirige hacia la tapa del sistema, esto se indica por el signo positivo de la velocidad. En esta parte se aprecia que la velocidad vertical va aumentando hasta un máximo positivo de 7.92×10^{-3} y de allí nuevamente disminuye su magnitud hasta llegar a cero, cuando se ubica sobre la pared del cilindro. Para las otras posiciones del impulsor se tiene el mismo comportamiento pero con valores distintos. Las magnitudes máximas positivas y negativas para ocho ubicaciones del impulsor se muestran en la Tabla 4.

Los resultados indican que el valor máximo positivo de la componente de velocidad axial (w), para la posición vertical de referencia dada por $m_2=(z_1+0.005)+(z_3-z_2)/2$ y las ocho posiciones de z_1 , va aumentando conforme el disco giratorio va ascendiendo sobre el eje axial, alcanzando una magnitud mínima y máxima de 7.92×10^{-3} y 16.26×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un aumento del 105.3%. Lo anterior es debido a que el centro de los núcleos negativos de las líneas de corriente también aumenta su valor al variar de manera ascendente la posición axial del disco giratorio.

Para el número de Reynolds de 0.63×10^4 , Fig. 9, se aprecia el mismo comportamiento pero con magnitudes distintas, en este caso los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad axial para $z_1=0.01$ son de 5.68×10^{-3} y -5.51×10^{-3} . En la Tabla 4 se muestran los valores máximos positivos y negativos de la componente de velocidad axial para otras posiciones del disco giratorio (z_1). Los resultados indican, como en el caso anterior, que el valor máximo positivo de la componente de velocidad axial (w), va aumentando conforme el impulsor va ascendiendo sobre el eje vertical. Para este caso la magnitud mínima y máxima es de 5.68×10^{-3} y 12.40×10^{-3} , respectivamente, es decir hay un incremento del 118.30%. Finalmente, al tomar como referencia el número de Reynolds de 2.74×10^4 y compararlo con el de 0.634×10^4 , se encontró que los valores máximos positivos de la componente de velocidad axial (w) se redujeron en promedio 12.32%.

Cabe mencionar que el análisis de la componente de velocidad axial (w) se hizo para dos posiciones en el eje vertical con el objeto de observar su comportamiento por encima y por debajo del impulsor.

Los resultados obtenidos en esta investigación han mostrado ser congruentes con los reportados en la literatura. Para este trabajo se ha encontrado que el movimiento del fluido se compone de dos flujos: uno que gira en sentido anti horario, ubicado en la parte superior del impulsor, y otro que gira en sentido horario, ubicado en la parte inferior del mismo. Los valores más altos de la función corriente meridional, Ψ , se encontraron en el centro de los flujos. Este comportamiento es congruente con el trabajo de Khalili *et al.* [5] y Yu *et al.* [6] aunque las magnitudes de la función corriente son diferentes, debido al rango del número de Reynolds que ellos analizaron. La diferencia de este trabajo con otros reportados en la literatura es el valor del número de Reynolds y el detalle del análisis de las componentes de velocidad radial (u) y axial (w), lo que permite comprender de mejor manera el comportamiento del flujo en el interior del cilindro al variar la posición axial del impulsor.

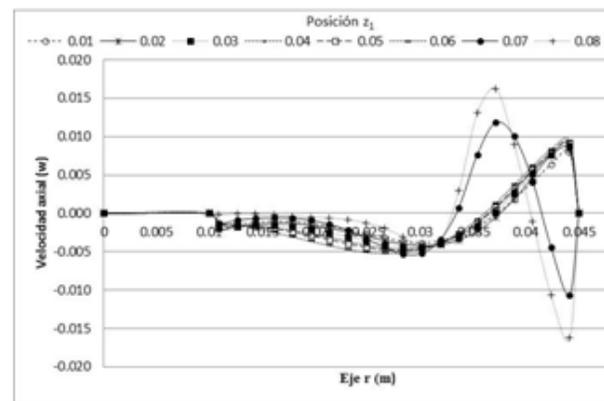


Figura 8 Componente de velocidad axial (w) para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua), y distintas posiciones del impulsor (z_1)

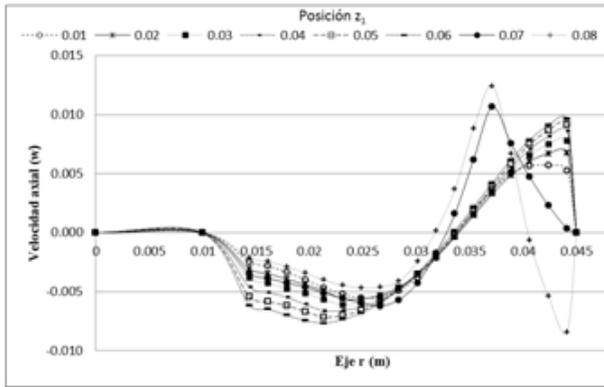


Figura 9 Componente de velocidad axial (w) para $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina), y distintas posiciones del impulsor (z_1)

Posición z_1 (m)	$u_{m\acute{a}x} (+)$ Agua	$u_{m\acute{a}x} (-)$ Agua	$u_{m\acute{a}x} (+)$ Gasolina	$u_{m\acute{a}x} (-)$ Gasolina
0.01	7.92×10^{-3}	-3.80×10^{-3}	5.68×10^{-3}	-5.51×10^{-3}
0.02	8.31×10^{-3}	-3.99×10^{-3}	6.77×10^{-3}	-5.58×10^{-3}
0.03	8.72×10^{-3}	-4.40×10^{-3}	7.77×10^{-3}	-6.09×10^{-3}
0.04	8.94×10^{-3}	-4.67×10^{-3}	8.58×10^{-3}	-6.61×10^{-3}
0.05	9.06×10^{-3}	-4.81×10^{-3}	9.17×10^{-3}	-7.16×10^{-3}
0.06	9.46×10^{-3}	-5.24×10^{-3}	9.61×10^{-3}	-7.44×10^{-3}
0.07	11.85×10^{-3}	-10.6×10^{-3}	10.64×10^{-3}	-6.20×10^{-3}
0.08	16.26×10^{-3}	-16.25×10^{-3}	12.40×10^{-3}	-8.39×10^{-3}

Tabla 4 Componente de velocidad axial (w) máxima para distintas ubicaciones del impulsor, para $Re=2.74 \times 10^4$ (agua) y $Re=0.63 \times 10^4$ (gasolina)

Conclusiones

Los resultados indican que la estructura del movimiento del fluido en el sistema se compone de dos flujos: uno que gira en sentido horario, ubicado por debajo del disco impulsor y otro que gira en sentido anti horario ubicado por encima del mismo.

Al variar la posición axial del impulsor de manera ascendente sobre el eje del cilindro se encontró que: la componente de velocidad radial positiva (u) disminuyó 24.94% para $Re=2.74 \times 10^4$ y 10.99% para $Re=0.63 \times 10^4$; la componente de velocidad axial positiva (w), por debajo del disco giratorio, disminuyó 22.85% y 28.55%, para los mismos números de Reynolds; y la componente de velocidad axial positiva (w), por encima del impulsor, aumentó 105.3% y 118.30%, para los mismos números de Reynolds. Al tomar como referencia el número de Reynolds de 2.74×10^4 y compararlo con el de 0.63×10^4 , se encontró que: los valores máximos positivos de la componente de velocidad radial (u) se redujeron en promedio 10.83%; las magnitudes máximas positivas de la componente de velocidad axial (w), por debajo del disco impulsor, se redujeron en promedio 14.30%; y los valores máximos positivos de la componente de velocidad axial (w), por encima del disco impulsor, se redujeron en promedio 12.32%. Estos resultados revelan la dependencia que tiene la posición axial del impulsor y el número de Reynolds en el desarrollo del flujo y muestran que la variación de estos parámetros no es proporcional al cambio en las componentes de velocidad y la función corriente.

Referencias

[1] Pao, H-P. (1972). “Numerical solution of the Navier Stokes equations for flows in the disk-cylinder system”. Phys. Fluids. 15 (1):4-11.

[2] Bertelá, M., Gori, F. (1982). “Laminar flow in a cylindrical container with a rotating cover”. J. Fluids Eng. 104 (1):31-39. doi:10.1115/1.3240849.

- [3] Lang, E., Sridhar, K., Wilson, N. W. (1994). "Computational study of disk driven rotating flow in a cylindrical enclosure". *Journal of fluids engineering*. 116 (4):815-820.
- [4] Valentine, D. T., Jahnke, C. C. (1994). "Flows induced in a cylinder with both end walls rotating". *Physics of fluids*. 2702-2710. doi:10.1063/1.868159.
- [5] Khalili, A., Adabala, R. R., Rath H. J. (1995). "Flow induced by a asymmetrically placed disk rotating coaxially inside a cylindrical casing". *Acta Mechanica*. Springer-Verlag. 9-19. Vol 113. [6] Yu, P., Lee, T. S., Zeng, Y., Low, H. T. (2007). "Characterization of flow behavior in an enclosed cylinder with a partially rotating end wall". *Physics of fluids* 19, 057104, doi: 10.1063/1.2731420.
- [7] Sturzenegger, J. C., Sarasúa, L. G., Martí, A. C. (2012). "Analytical solutions for the axisymmetric flow inside a cylindrical container with a rod along the axis at low Reynolds numbers". *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 28, pp. 473-479.
- [8] Landau y Lifshitz. (1982). *Fluids Mechanics*. Vol. 6, Pergamon Press.
- [9] Gerber N. (1975). "Properties of rigidly rotating liquids in closed partially filled cylinders". *ASME, Transactions, Series E- Journal of Applied Mechanics*. 42:734,735.
- [10] Tjonov, A. N., Samarsky, A. A. (1980). *Ecuaciones de la física matemática*. Edit. MIR, Moscú, pp 1-29.
- [11] A. Lizardi, H. Terres, R. López, M. Vaca, J. Flores, A. Lara, S. Chávez, J. R. Morales. (2014). "Efecto del Reynolds en el flujo rotatorio asimétrico generado en el interior de un cilindro". *XX Congreso Internacional Anual de la SOMIM*.
- [12] A. Lizardi R., H. Terres P., R. López C., M. Vaca M., J. Flores R., A. Lara V., S. Chávez S., J. R. Morales G. 7 al 11 de Septiembre 2015. "Flujo asimétrico en cámaras cilíndricas para distintos radios y fluidos". *Primer Congreso Internacional de Energía (CIE 2015)*. Pp. 31-38. México, D. F.