

Uso de programas computacionales especializados para analizar circuitos eléctricos en estado dinámico para incrementar el interés de los jóvenes de ingeniería eléctrica

Jacinto Torres, Luis Contreras, Guillermo Tapia, José García y Nestor Gonzales

J. Torres, L. Contreras, G. Tapia, J.Garcia y N. Gonzales
Instituto Tecnológico Superior de Irapuato, Departamento de Ingeniería Electromecánica, Carr. Irapuato - Silao
Kilómetro 12.5, Centro, 36821 Irapuato, Guanajuato.
jacintorres_j@hotmail.com

M. Ramos., V.Aguilera., (eds.) .Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Handbook -©ECORFAN- Valle de Santiago, Guanajuato, 2014.

Abstract

This paper describes the importance of to use specialized software in the solution of electrical circuits, in order to analyze the dynamic or transient response of the circuit. In many schools of the globe, the specialized software is used in order to give teaching support and arouse interest of students of electrical engineering in solving such problems. Consequently, research is aimed to use programs as ATP (Alternative Transient Program) and SIMULINK of MATLAB[®] (Matrix Laboratory) for analyzing electromagnetic transients in electrical circuits. In the same way, techniques based on inverse Laplace transform and numerical Fourier transform are used as a additional tool in the solution of the same electrical circuit, this techniques are used in order to show the relevance of the results.

20 Introducción

El análisis de circuitos eléctricos juega un rol muy importante en la formación de todo estudiante en el área de ingeniería eléctrica. Así mismo, desde su preparación como estudiante hasta el logro de su carrera profesional, los fundamentos teórico-prácticos que reciba serán fundamentales en el ejercicio de su profesión. Debido a su relevancia, las instituciones de educación superior incluyen este tema en los programas de estudio de análisis de circuitos eléctricos en corriente directa y alterna, tanto para estudiantes de ingeniería eléctrica como de otras especialidades relacionadas como son electromecánica, electrónica y mecatrónica. Adicionalmente, es importante que los estudiantes en su formación profesional adquieran herramientas para la solución de circuitos eléctricos ya sea de forma teórico-matemático, así como utilizando algún software. Además, es importante destacar que a pesar de la importancia de un simulador en el análisis de circuitos, éste debe ser contemplado como una herramienta auxiliar para despertar el interés de los estudiantes y una forma aceptable para validar y comprobar los resultados, pero nunca deberá sustituir el análisis teórico-matemático.

Bajo un enfoque de solución, el análisis de circuitos eléctricos simples en estado dinámico se puede realizar utilizando métodos de solución exacta, sin embargo cuando se tienen redes extensas y con componentes no lineales no es trivial encontrar la solución con métodos exactos. El análisis de circuitos eléctricos en estado dinámico se puede resolver en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Cabe mencionar, que en el dominio del tiempo implica resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en donde es muy complicado para resolver analíticamente, entonces se pueden utilizar algunos de los procedimientos para aproximar la solución. Un procedimiento es simplificar las EDO a una que pueda resolverse analíticamente. El otro enfoque consiste en obtener métodos para aproximar la solución del problema original directamente, como por ejemplo algún método basado en las formulaciones de Runge-Kutta, Adams, etc. Este último enfoque es el más usado comúnmente, puesto que los métodos numéricos proporcionan resultados más precisos e información del error numérico durante la solución aproximada. Además, el auge en las herramientas computacionales ha permitido mejorar la eficiencia de estos métodos, coadyuvando a los estudiantes y profesores en la solución del problema. En la actualidad, con el desarrollo de herramientas computacionales la simulación en el dominio del tiempo se vuelve cada vez mucho más sencilla.

Por otra parte, para la solución en el dominio de la frecuencia se requiere determinar su ecuación de estado, en donde esta técnica es una herramienta clásica en la teoría de control.

No obstante, es una técnica poderosa que por su importancia se sigue utilizando para analizar la propagación de la onda electromagnética en diversos componentes eléctricos de los cuales se pueden mencionar líneas aéreas, cables subterráneos, sistemas de puesta a tierra, subestaciones, maquinas eléctricas rotatorias y estáticas, etc. (Greenwood A. 1991).

Para obtener la solución de circuitos eléctricos de gran cantidad de elementos (gran escala), ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia se vuelve complejo, tedioso y aburrido para los jóvenes de ingeniería eléctrica, provocando que algunos pierdan interés en la materia y puede ser un factor que aporte en el índice de reprobación. Sin embargo, una forma de despertar el interés de los estudiantes en la resolución de circuitos eléctricos en estado dinámico es por medio del uso de laboratorio físicos como el TNA (Transient Network Analyzers) con reactores, interruptores, transformadores, etc. que permite caracterizar el comportamiento transitorio de una red eléctrica o por medio de laboratorios virtuales que utilizan los métodos numéricos para la solución, como son el EMTP (Electromagnetic Transient Program), SPICE, MULTISIM, SPCAD, MATLAB®, ATP, etc. Éstos últimos parecen tener mayor aceptación, pues son mucho más fáciles de aprender e interpretar. La mayoría de ellos están disponibles para una amplia variedad de sistemas operativos, como son Windows XP//Vista/8, MAC y Linux, y son laboratorios idóneos para resolver circuitos eléctricos en estado estable y dinámico (Dommel H. 1969).

Análisis transitorio en el dominio de la frecuencia.

En esta sección se describe una metodología para analizar transitorios electromagnéticos en circuitos eléctricos en el dominio complejo o de la frecuencia. La metodología consiste en utilizar las técnicas de Laplace y de Fourier para pasar del dominio del tiempo a la frecuencia y viceversa.

Transformada de Laplace. Considérese a $f(t)$ como una forma de onda en el dominio del tiempo y a $F(s)$ como su representación en el dominio de Laplace. Sus transformada directa e inversa de Laplace son (Naredo J.L et al. 1999; Hwei P. Hsu 1998):

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (20.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (20.2)$$

Donde $s = c+j\omega$; ω es la frecuencia angular y c una constante finita con un valor mayor o igual a cero. De la sustitución de s en (1) y (2):

$$F(c + j\omega) = \int_0^{\infty} [f(t)e^{-\omega t}] e^{-ct} dt \quad (20.3)$$

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(c + j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \quad (20.4)$$

Obsérvese que cuando c es igual a cero, (3) y (4) corresponden a la transformada de Fourier:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (20.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (20.6)$$

El límite inferior en (5) es normalmente $-\infty$, aquí se toma como 0 pues solo se consideran funciones causales.

Transformada numérica de Fourier. La transformada de Laplace es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, su aplicación a problemas prácticos suele ser limitada por algunas razones como:

- 1 Funciones del dominio del tiempo $f(t)$ o de la frecuencia $F(\omega)$ que son complicadas de pasar de un dominio al otro.
- 2 Funciones de tiempo no especificadas analíticamente, sino por medio de gráficas, de mediciones experimentales o bien en forma discreta.

La transformada de Fourier constituye una herramienta fundamental ya que permite el manejo de funciones irracionales. Para la utilización numérica de la transformada de Fourier las ecuaciones deben ser expresadas en forma de sumatoria, con límites de integración finitos y muestreada en un intervalo de tiempo $[0, T]$.

Así, las expresiones (5) y (6) puede representarse mediante una serie de valores discretos como:

$$F[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{\frac{jk n 2\pi}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (20.7)$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{\frac{jk n 2\pi}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (20.8)$$

La expresión (7) es conocida como la transformada discreta de Fourier (TDF) de una función discreta $f[n]$ y (8) es su transformada inversa. Al implementarlas se presentan errores numéricos debidos principalmente a los procesos de truncamiento y discretización, los cuales se analizan a continuación.

Errores por truncamiento. Los errores por truncamiento se originan por la necesidad práctica de considerar una frecuencia de corte finita en la ecuación (8); es decir, la trayectoria de integración es en el intervalo $[-\Omega, \Omega]$. Este truncamiento origina oscilaciones del tipo Gibbs, las cuales pueden introducir errores considerables en la evaluación del fenómeno transitorio.

Este error por truncamiento puede eliminarse en forma bastante efectiva mediante el empleo de filtros digitales especiales conocidos como ventanas.

Entre las más utilizadas en ingeniería se encuentran las de Lanczos y Hamming. La ventana de Lanczos tiene la siguiente formulación (Guardado J.L. 1984):

$$\sigma(\omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)}{\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)} \quad (20.9)$$

Mientras que la de Hamming:

$$\sigma(\omega) = \frac{\cos\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right) + 1}{2} \quad (20.10)$$

Así, al incluirse la ventana de datos $\sigma(\omega)$ en la evaluación de transitorios se modifica la expresión (6) de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) \sigma(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (20.11)$$

En las simulaciones de fenómenos transitorios en este trabajo, se utilizará la ventana de Lanczos para minimizar los errores de truncamiento.

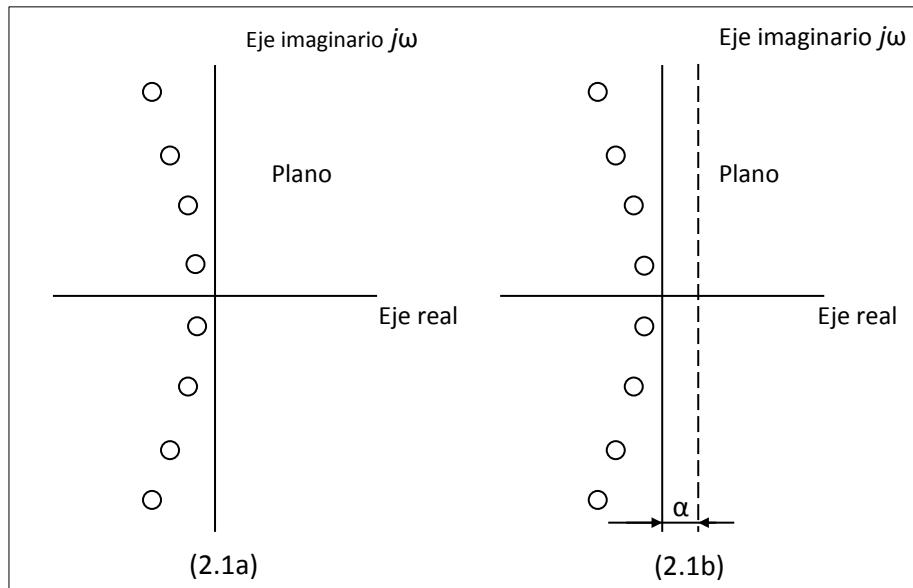
Errores por discretización. Estos errores se originan por la cercanía de los polos de la función de transferencia del sistema, $F(\omega)$, a la trayectoria de integración en el eje imaginario $j\omega$. Para ilustrar lo anterior, en la Figura 1a se muestra la localización típica de los polos de $F(\omega)$. Este tipo de error se reduce desplazando la trayectoria de integración un cierto valor α , Figura 1b. A este concepto se le conoce como frecuencia compleja y consiste en asignarle una parte real a $j\omega$ ($s = \alpha + j\omega$).

Lo anterior modifica la transformada inversa de Fourier (6), quedando de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + j\omega) e^{(\alpha + j\omega)t} d\omega \quad (20.12)$$

La ecuación (12) es conocida comúnmente como la transformada modificada de Fourier. Aplicando lo anterior a (11) se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} f(\alpha + j\omega) \sigma(\omega) e^{(\alpha + j\omega)t} d\omega \quad (20.13)$$

Figura 20 Concepto de frecuencia compleja.

En la implementación numérica de la ecuación (13) se presentan dificultades cuando la frecuencia es igual a cero, ya que normalmente existen singularidades en ese punto de la trayectoria de integración. Para evitarlas, el espectro de frecuencia se divide en tiras de ancho de $2\omega_0$ y se evalúa para frecuencia impares quedando de la siguiente forma:

$$f(n) = \operatorname{Re} \left[\frac{N}{\pi} e^{\alpha(n-1)t} e^{j(n-1)(\pi/N)} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jnk2(\pi/N)} \right] \quad (20.14)$$

donde:

$$F(k) = F[\alpha + j(2k-1)\omega_0] \sigma[j(2k-1)\omega_0] 2\omega_0 \quad (20.15)$$

$$\sigma[j(2k+1)\omega_0] = \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right]}{\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N} \right]} \quad (20.16)$$

La expresión (14) es el punto de partida para el desarrollo de un algoritmo computacional para obtener la respuesta transitoria de un sistema en el dominio del tiempo a partir de su respuesta en el dominio de la frecuencia. Para evaluarla numéricamente se requiere seleccionar adecuadamente los parámetros que intervienen. La selección de estos se analiza a continuación.

El paso de integración en el dominio de la frecuencia ω_0 relaciona las siguientes variables, donde T es el tiempo de duración del fenómeno transitorio:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T} \quad (20.17)$$

El número de muestras N es cualquier número entero positivo que resulte de una potencia de dos.

$$N = 2^M \quad (20.18)$$

Normalmente el número de muestras utilizado es 64, 128, 256, 512 y 1024. Mientras mayor sea el número de muestras se obtiene una mayor exactitud en la respuesta, pero también se incrementa el tiempo de cómputo.

El paso de integración en el dominio del tiempo se obtiene de la selección de T y N mediante la siguiente expresión:

$$t_0 = \frac{T}{N} \quad (20.19)$$

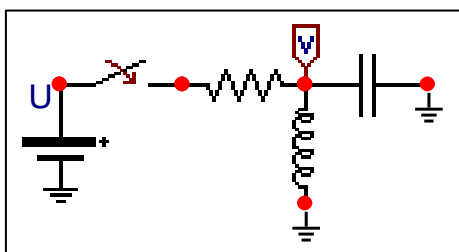
Finalmente, el desplazamiento de la trayectoria de integración α se evalúa como:

$$\alpha = 2\omega_0 \quad (20.20)$$

Implementación en programas computacionales.

Con la finalidad de mostrar la practicidad del uso de software especializado en la solución de circuitos eléctricos, así como el uso de herramientas clásicas de análisis bajo un enfoque de programación para obtener la solución del circuito se propone como circuito bajo análisis el circuito que se muestra en la Figura 2, en donde sus parámetros (implícitos en el diagrama) son: $R=1 \Omega$, $L=2 \text{ mH}$, $C=1 \text{ F}$, la fuente de excitación es una función escalón de 10 volts y el voltaje en el capacitor (voltaje con el instrumento de medición) es el que se va a calcular.

Figura 20.1 Circuito eléctrico bajo análisis.



Aunque el circuito eléctrico bajo análisis contiene pocos elementos, es importante notar que lo que se pretende mostrar es que tanto el uso de las herramientas para la solución clásicas como el uso de software especializado pueden ser de gran utilidad en la solución de circuitos, más aun, se espera que motive a despertar el interés en la solución de problemas relacionados con los circuitos que contienen gran cantidad de elementos como lo son en la mayoría de los casos prácticos.

Para este caso en particular se propone resolver el circuito eléctrico por los siguientes métodos:

- A) Simulink
- B) ATP
- C) Transformada inversa de Laplace.
- D) Transformada numérica de Fourier.

Implementación del programa computacional SIMULINK (MATLAB[®])

Para implementar el software de SIMULINK MATLAB[®] se requiere determinar la ecuación de estado del circuito eléctrico de la Figura 2 en el nodo V donde se encuentra el medidor de voltaje. A continuación se presenta el desarrollo:

$$V_e = \frac{1}{S} \quad (20.21)$$

$$Z = R + \frac{1}{C} \cdot \frac{S}{S^2 + \frac{1}{CL}} \quad (20.22)$$

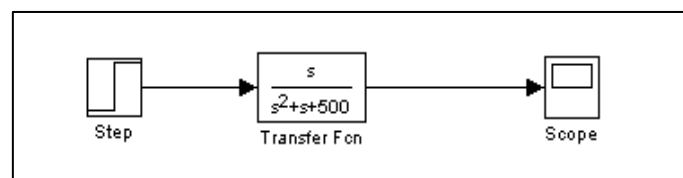
$$V_s = \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{CR} \cdot \frac{S}{S^2 + \frac{1}{RC}S + \frac{1}{CL}} \quad (20.23)$$

Sustituyendo valores:

$$V_s = V_e \cdot \frac{S}{S^2 + S + 500} \quad (20.24)$$

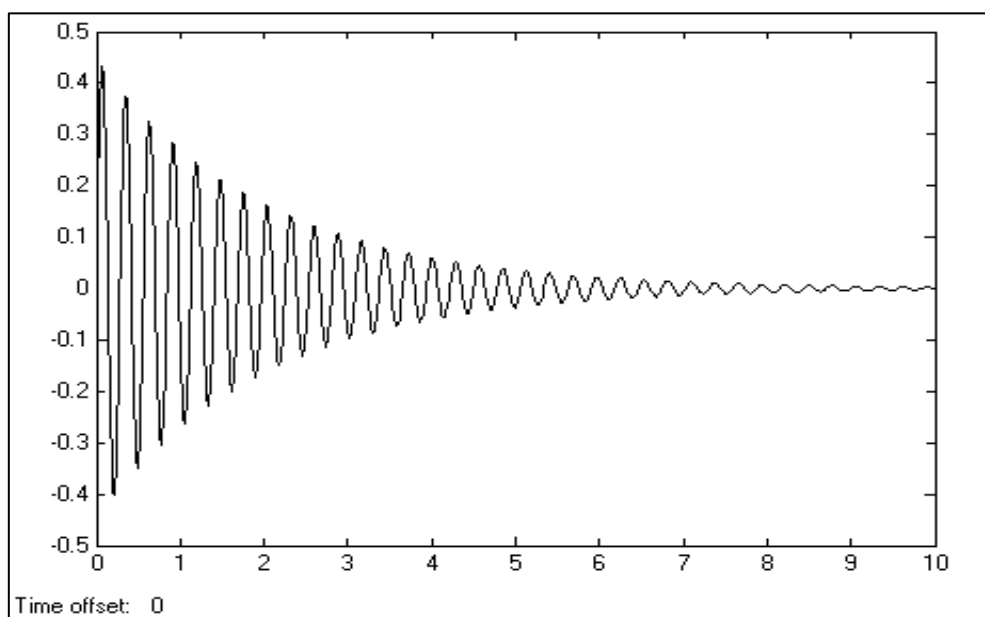
En la Figura 3 se muestra el diagrama de bloque elaborado en SIMULINK MATLAB[®] para caracteriza la respuesta de voltaje en el nodo V del circuito de la Figura 2 utilizando la ecuación de estado (24).

Figura 20.2 Diagrama de bloque utilizando SIMULINK. MATLAB[®]



La respuesta transitoria en el voltaje del capacitor del circuito es el siguiente.

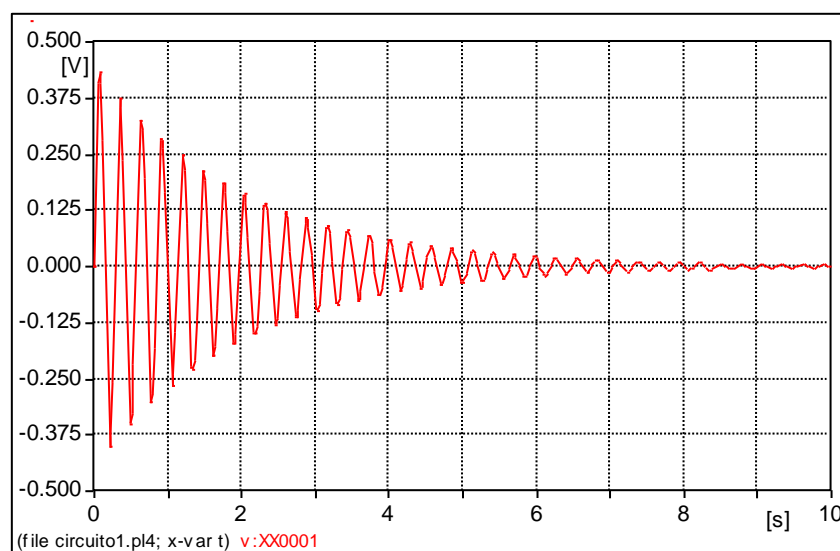
Figura 20.3 Voltaje transitorio del capacitor utilizando SIMULINK. MATLAB[®]



Implementación del programa computacional ATP

Caundo se hace uso de software más especializado, como lo es el Alternative Transient Program (ATP), y debido a su interface grafica suficiente armar el circuito y asignar los parámetros del mismo, y en este casola respuesta que se tiene se mestra en la Figura,

Figura 20.4 Voltaje transitorio del capacitor utilizando ATP.



Implementación de métodos numéricos.

En esta sección se implementarán la transformada de Laplace y numérica de Fourier para determinar la respuesta de voltaje en el capacitor del circuito considerando los mismos datos del circuito de prueba. Los resultados se validan por comparación con las simulaciones obtenidas con el software de ATP y SIMULINK de MATLAB[®].

Tranformada inversa de laplace

Desarrollo de la formulación:

$$V_s = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{RC} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{CL}} \quad (20.25)$$

$$a = \frac{1}{2RC} \quad (20.26)$$

$$\omega^2 = \frac{4CR^2 - L}{4LC^2R^2} \quad (20.27)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4CR^2 - L}{4LC^2R^2}} \quad (20.28)$$

$$V_s = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (20.29)$$

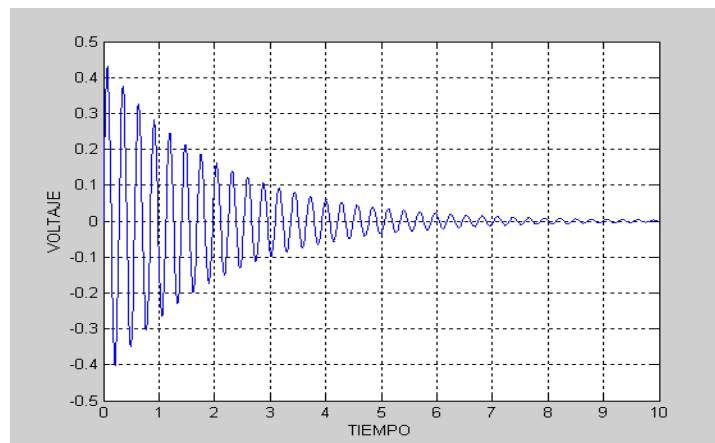
$$V_s = \frac{1}{RC\omega} \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (20.30)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace obtenemos la siguiente expresión en el dominio del tiempo:

$$V_s = \frac{1}{RC} \cdot e^{-at} \text{sen}(\omega t) \quad (20.31)$$

La respuesta en el dominio del tiempo en el punto V de la Figura 2 utilizando la ecuación (31) se presenta en la Figura 6:

Figura 20.5 Voltaje transitorio del capacitor empleando la transformada inversa de Laplace.



El listado del programa de cómputo desarrollado es el siguiente:

```
clear all

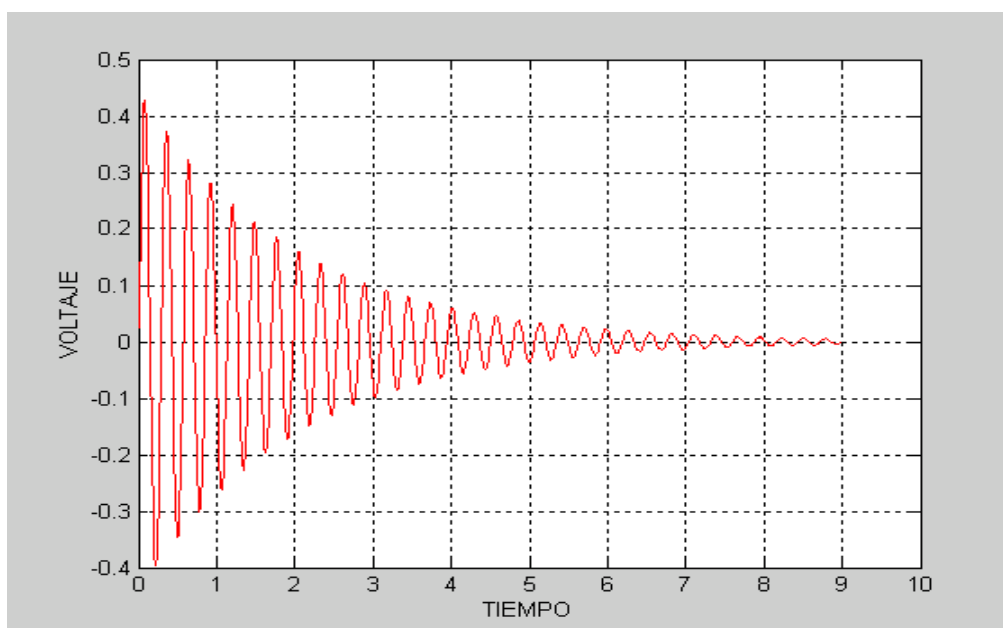
clc
R=1;
L=2e-3;
C=1;

w=sqrt((4*C*R^2-L)/(4*L*C^2*R^2));
for n=0:1000
t=n*0.01;
tiempo(n+1)=t;
a=1/2*R*C;
Vs(n+1)=(10/(R*C*w))*exp(-a*t)*sin(w*t);
end
plot(tiempo,Vs)
grid
```

Transformada numérica de Fourier

Al aplicarse el método de la transformada numérica de Fourier para el circuito de la Figura 2, se obtiene la siguiente gráfica.

Figura 20.6 Voltaje transitorio de la Figura 2 aplicando la transformada numérica de Fourier



El listado de computadora correspondiente es el siguiente:

```

clear all
clc
t=10;           % tiempo de simulación
wo=pi/t;       % paso de integracion
alfa=2*wo;     % desplazamiento en el eje real
n=1024;        % numero de muestras
for r=1:n
    wi=((2*r)-1)*wo; % la multiplicación de un numero impar por el paso de integración
    s=alfa+(j*wi); % Numero complejo para afectar a la señal de respuesta
    p=(((2*r)-1)*pi/(n));
    lanczos=(sin(p)/p)*2*wo;
    %Vs=1/s;
    v2(r)=(1/(s^2+s+500))*10*lanczos;
end
v3=ifft(v2); % Se le aplica la transformada inversa discreta de fourier ifft
to=t/n; % paso de discretización
for r=1:n,
    p1=(j*pi*(r-1))/n;
    p2=alfa*to*(r-1);
    v4(r)=real(n*exp(p1)*exp(p2)*v3(r)/(pi));
    t3(r)=to*r;
end
n1=round(n*.9);
for r=1:n1;
    t4(r)=t3(r);
    v5(r)=v4(r);
end
plot(t4,v5,'r')
grid

```

20.1 Conclusiones

Se han implementado técnicas de análisis numérico y modelos matemáticos para estudiar el comportamiento transitorio en un circuito eléctrico. Entre ellas destacan la utilización de la transformada de Laplace y la transformada numérica de Fourier, así como el uso de software especializado como lo es ATP y SIMULINK de MATLAB[®], esto con la finalidad de obtener la respuesta transitoria del circuito eléctrico bajo análisis.

En términos coloquiales los resultados obtenidos bajo el enfoque de las técnicas de solución clásica y utilizando software especializado, son acordes. Con esto se muestra que se puede hacer un buen uso de las herramienta didáctica para motivar el estudio de circuitos eléctricos en estado dinámico y/o transitorio, ya sea con el uso de técnicas clásicas de solución y con el apoyo de software especializado. Por tanto, se considera que es importante utilizar la tecnología computacional para exponer los fenómenos y conceptos eléctricos de forma interesante con la finalidad de motivar a los estudiantes de ingeniería eléctrica y/o ramas afines.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su reconocimiento a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México por el apoyo brindado para la realización de este trabajo de investigación.

Referencias

Greenwood A. (1991). *Electrical transients in power systems*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.

Dommel H. (1969). Digital computer solution of electromagnetic transient in single and multiphase networks. *IEEE transactions on Power Apparatus and Systems*, 88, 1801-1809

Naredo J. L., Moreno P., Guardado J.L, Gutiérrez J. A, (1999) La Transformada Numérica de Laplace como una Herramienta de Investigación y Desarrollo en Ingeniería Eléctrica. *Segundo Congreso Nacional de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, CONATEC 99, Instituto Tecnológico de Cd. Madero*.

Hwei P. Hsu. (1998). *Análisis de Fourier*, Prentice, México.

Guardado J.L. (1984). *Respuesta Estática y Dinámica de la Líneas de Transmisión*, Monografía para Obtener el Título de Ingeniero Electricista, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. México.

Grainger J.J., Stevenson W.D. Jr., (1996). *Análisis de Sistema de Potencia*, Primera Edición en Español, Mc Graw-Hill, México.

Anderson P.M., (1981). *Analysis of Faulted Power Systems*, Fourth Edition the Iowa Stated University Press, Ames.