

Modelo Aproximado para el Cálculo de la Impedancia Interna por Unidad de Longitud de Conductores Cilíndricos Sólidos

José García, Francisco Ortega y Juan Razón

J. García, F. Ortega y J. Razón
Instituto Tecnológico Superior de Irapuato, Carretera Irapuato-Silao, km. 12.5, C. P. 36821, Irapuato, Gto.
migarcia@itesi.edu.mx

M. Ramos., V.Aguilera., (eds.) .Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Handbook -©ECORFAN- Valle de Santiago, Guanajuato, 2014.

Abstract

This paper presents the development of an approximate model for calculating the internal impedance per unit length of solid cylindrical conductors. The exact model has a quotient that involves to Bessel functions and produces unstable results, which are often incorrect when the model is used in practical studies at high frequency, thus, the proposed approximate model is obtained from the exact model by asymptotic analysis of Bessel functions for large and small arguments, in order to consider the calculation of the internal impedance for high frequencies. The obtained approximate model is modified to include three constants that improve accuracy and reduce errors. The constants are calculated using the Taylor series expansion on the zero point. The reliability of the approximate model is demonstrated by a case study with the ACSR 636-MCM conductor (Grosbeak conductor) with a graph of the behavior of the internal impedance, obtained by the approximate and exact model, as function of the frequency and the percentage of relative error of the approximate model as function of electrical frequency.

19 Introducción

En el análisis numérico de varios problemas electromagnéticos, el cálculo de los modelos aplicados a estos continuamente se basa en las funciones de Bessel. Un ejemplo típico de tal problemática es el cálculo de la impedancia interna por unidad de longitud de conductores cilíndricos sólidos, los cuales son energizados por corrientes variantes en el tiempo (Lovricet al, 2011). Estas corrientes variantes en el tiempo provocan que la resistencia y la inductancia interna de los conductores varíen con la frecuencia de dichas corrientes de manera no lineal. La razón de este efecto es atribuida principalmente a la distribución no uniforme del flujo de corriente a través de la sección transversal del conductor, con una corriente tendiendo a fluir en la superficie. Esta tendencia se incrementa con la frecuencia y es denominada efecto piel. En general, el aumento de la frecuencia de las corrientes armónicas se traduce en un incremento en la resistencia y una disminución en la inductancia del conductor (Arrillaga et al, 1997).

La impedancia interna de un conductor es dependiente de la frecuencia, ya que es la combinación fasorial de la resistencia e inductancia interna (Knight, 2010), por lo que se puede decir que la impedancia interna de un conductor energizado por corrientes armónicas en el tiempo, con un radio y una determinada conductividad, es la impedancia que presenta dicho conductor al cambiar la frecuencia de la corriente. Esta impedancia, también llamada impedancia superficial (Stratton, 2007), por considerar el efecto piel, necesita ser calculada en el análisis numérico de varios problemas electromagnéticos, tales como los análisis en estado estable y transitorio de redes de tierras y líneas de transmisión (SarajcevyVijevic, 2009; Dommel, 1992), interferencia eléctrica de las líneas de transmisión en gaseoductos (DawalibiySouthey, 1989) y análisis de antenas (Moore yPizer, 1984).

Los modelos exactos para la impedancia interna por unidad de longitud de conductores cilíndricos sólidos y tubulares, donde se toma en cuenta el efecto piel, pueden ser expresados por funciones de Bessel, por funciones de Bessel modificadas, por una combinación de estas o por funciones Kelvin (Wang y Liu, 2001).

Todas estas funciones son definidas por series infinitas, las cuales convergen rápidamente solo para argumentos pequeños. Por lo tanto, en el caso de valores de frecuencia bajos, las magnitudes de los argumentos de las funciones de Bessel son pequeñas y la formula exacta para la impedancia interna puede ser empleada exitosamente. Sin embargo, si las magnitudes de los argumentos de las funciones de Bessel son grandes, aparecen dificultades de convergencia.

En tales casos, los cuales ocurren generalmente a altas frecuencias, los modelos aproximados para la obtención de la impedancia interna, que emplean las funciones de Bessel, provocan resultados inestables y frecuentemente erróneos (Lovricet al, 2011).

El problema del cálculo de las funciones de Bessel, especialmente para parámetros grandes, ha captado la atención de un gran número de autores en los años recientes, y en consecuencia, diversos métodos están ahora disponibles (Lovricet al, 2011). Actualmente, es bien sabido como evaluar numéricamente las funciones de Bessel y que muchas rutinas están disponibles para efectuar tal cálculo (Amos, 1985; Amos, 1986), sin embargo, las rutinas de software disponibles fallan cuando se calculan ecuaciones que consisten de un producto y un cociente de las funciones de Bessel con argumentos grandes complejos o reales. Un problema adicional aparece cuando los argumentos grandes son complejos y las formulas aproximadas incluyen funciones senos y cosenos.

La impedancia interna de conductores cilíndricos para grandes parámetros puede ser calculada mediante ciertos modelos aproximados, los cuales no involucran el cálculo de las funciones de Bessel, funciones de Bessel modificadas o funciones Kelvin y por lo tanto permiten determinar la impedancia interna de una manera más sencilla con poco esfuerzo computacional. Sin embargo, estos modelos no son exactos y presentan cierto margen de error, por lo que son clasificados como modelos de baja precisión (NahmanyHolt,1972; WedepohlyWilcox, 1973) y modelos de alta precisión (Vujevicet al, 2009). La impedancia interna de conductores sólidos se puede calcular en forma relativamente rápida mediante los modelos exactos utilizando rutinas de Matlab o Mathematica, sin embargo, esto implica un mayor esfuerzo computacional, lo cual, como se mencionó antes, se evita utilizando modelos aproximados. En este contexto, en este artículo se presenta un modelo aproximado que permite el cálculo de la impedancia interna de conductores cilíndricos sólidos de manera sencilla y con poco esfuerzo computacional, ya que involucra las funciones de Bessel ordinarias.

19.1 Materiales y métodos

Modelado Clásico de la Impedancia Interna de Conductores Cilíndricos

Para campos armónicos en el tiempo la densidad de corriente dentro de los conductores en toda la sección transversal no es uniforme. Para situaciones en las cuales se tienen campos armónicos en el tiempo, el campo eléctrico E_y el campo magnético H_x existen interrelacionados y presentes simultáneamente. El trabajo necesario para mover las cargas de un conductor que está sometido a un campo eléctrico armónico en el tiempo se debe a la energía procedente del campo magnético, por lo que en un buen conductor se cumple que (Sadiku, 2003),

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H \quad (19.1)$$

donde ω es la frecuencia de los campos armónicos y μ representa la permeabilidad magnética del conductor. La expresión anterior corresponde a la segunda ecuación de Maxwell para campos armónicos en el tiempo, la cual es obtenida a partir la Ley de Faraday.

Debido a que la densidad de corriente es $J = \sigma E$, se puede obtener a partir de esta expresión y la Ecuación (1) que el rotacional de la densidad de corriente es directamente proporcional a la intensidad de campo magnético.

$$\nabla_{\mathbf{x}}J = -j\omega\mu\sigma H \quad (19.2)$$

Al tomar el rotacional de ambos miembros de la Ecuación (2) se obtiene la siguiente expresión,

$$\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}J = -j\omega\mu\sigma(\nabla_{\mathbf{x}}H) \quad (19.3)$$

Aplicando la siguiente identidad vectorial $\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ a la Ecuación (3) resulta,

$$\nabla(\nabla \cdot J) - \nabla^2 J = -j\omega\mu\sigma(\nabla_{\mathbf{x}}H) \quad (19.4)$$

Ya que $\nabla \cdot J = 0$ y $\nabla_{\mathbf{x}}H = J$, la Ecuación (4) se puede expresar de la siguiente manera,

$$-\nabla^2 J = -j\omega\mu\sigma J \quad (19.5)$$

Reordenando la Ecuación (5) y definiendo a la constante de propagación del conductor como $\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$, se obtiene la denominada ecuación de difusión, dada por (6), la cual describe la fluctuación de la densidad de corriente dentro del conductor.

$$\nabla^2 J - \gamma^2 J = 0 \quad (19.6)$$

Para un conductor con sección transversal circular de radio a no existe variación de la densidad de corriente a lo largo de él (coordenada z), ni con el ángulo ϕ (coordenada ϕ), de manera que la densidad de corriente solo varía en forma radial (coordenada ρ) y debido a que la corriente fluye a lo largo del conductor la densidad de corriente solo tiene componente en z (J_z). Considerando lo anterior la ecuación de difusión se puede escribir, en coordenadas cilíndricas, de la siguiente manera,

$$\frac{d^2 J_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_z}{d\rho} - \gamma^2 J_z = 0 \quad (19.7)$$

Es claro que la ecuación de difusión dada por (7) es idéntica a la ecuación de Bessel modificada (Bowman, 2003), por tanto la solución de dicha ecuación es,

$$J_z(\rho) = AI_0(\gamma\rho) + BK_0(\gamma\rho) \quad (19.8)$$

donde I_0 y K_0 son funciones de Bessel modificadas de orden cero de primera y segunda especie, respectivamente, mientras que A y B son constantes de integración.

Para determinar las constantes de integración se evalúa la J_z en el centro y en la superficie del conductor, $\rho = 0$ y $\rho = a$, respectivamente. Para evaluar en $\rho = 0$ se consideran las expansiones asintóticas para argumentos muy pequeños de I_0 y K_0 . En el centro del conductor el argumento es $\gamma\rho = 0$ y $K_0(\gamma\rho)$ es infinito (Arfken, 2012), por lo que representa una solución no física. Entonces este término se elimina de la solución dada por (8), resultando,

$$J_z(\rho) = AI_0(\gamma\rho) \quad (19.9)$$

Al evaluar J_z en la superficie del conductor se tiene $J_z(a)=J_{za}$, lo que permite determinar la constante de integración A , la cual es dada por la siguiente expresión,

$$A = \frac{J_{za}}{I_0(\gamma a)} \quad (19.10)$$

Sustituyendo (10) en (9) se obtiene la solución de la Ecuación (7), que corresponde a la densidad de corriente en el conductor.

$$J_z(\rho) = \frac{J_{za}}{I_0(\gamma a)} I_0(\gamma \rho) \quad (19.11)$$

La corriente total que fluye en el conductor se obtiene al integrar la densidad de corriente sobre toda la superficie transversal del conductor. Esta corriente es dada por la Ecuación (12).

$$I_{total} = \frac{2\pi a J_{za}}{\gamma} \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} \quad (19.12)$$

Es conocido que la impedancia interna por unidad de longitud es función de la componente del campo eléctrico a lo largo del conductor sobre la superficie de éste y de la corriente que fluye a través de él, expresado matemáticamente esto es,

$$Z_c = \frac{E_z|_{r=a}}{I_{total}} \quad (19.13)$$

Considerando la Ley Puntual de Ohm, entonces la densidad de corriente en la superficie del conductor es $J_{za} = \sigma E_z|_{r=a}$. Esta expresión se resuelve para E_z y se sustituye en (13) para obtener,

$$Z_c = \frac{J_{za}}{I_{total}} \quad (19.14)$$

Finalmente la I_{total} , Ecuación (12), se sustituye en (14) para obtener la expresión de impedancia interna para conductores cilíndricos (Dommel, 1992).

$$Z_{c,l} = \frac{\rho \gamma I_0(\gamma a)}{2\pi a I_1(\gamma a)} \quad (19.15)$$

En (15) I_0 e I_1 son las funciones de Bessel modificadas de orden cero y orden uno de primera especie, respectivamente, corresponde al radio del conductor y ρ es la resistividad del material del que está hecho el conductor, la cual es igual al inverso de la conductividad, σ .

La Ecuación (15) implica evaluar las funciones modificadas de Bessel I_0 e I_1 para argumentos complejos, por lo que es necesario conocer que existen diversas implementaciones de software de las funciones de Bessel modificadas para evaluar los argumentos reales de dichas funciones, pero pocas de estas implementaciones aceptan argumentos complejos. Este problema puede ser resuelto al calcular dos funciones especiales de Bessel $ber_n(v)$ y $bei_n(v)$. Estas funciones están disponibles en Mathcad, donde son llamadas funciones Kelvin de Bessel.

Las funciones de Bessel modificadas implementadas en Matlab aceptan de manera satisfactoria argumentos complejos, por lo que el uso de las funciones Kelvin de Bessel no es necesario (Johnson y Gram, 2003).

Desarrollo del Modelo Aproximado de Impedancia Interna

El desarrollo del modelo aproximado de impedancia interna se realizó por medio de un análisis del modelo exacto, dado por la Ecuación (15), en altas y bajas frecuencias. En el análisis se observó un comportamiento en altas frecuencias muy distinto al de bajas frecuencias, ya que las funciones de Bessel modificadas, al estar definidas por series infinitas, convergen a un valor específico para argumentos pequeños, pero presentan problemas para converger cuando se definen para argumentos muy grandes. De acuerdo a lo anterior, es imperativo que el modelo aproximado de impedancia interna tenga un comportamiento en altas y bajas frecuencias similar al modelo exacto con las funciones de Bessel modificadas. Esta característica indicó el uso de las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel modificadas para determinar un modelo aproximado de impedancia interna con un error aceptable en todo el espectro de frecuencias. Con el fin de satisfacer esta característica se analizaron las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel modificadas de orden cero y uno (Bowman, 2003).

Debido a que la expansión asintótica al infinito de las funciones de Bessel modificadas sigue siendo una serie infinita y no es posible implementarla en el modelo aproximado de impedancia interna, entonces se optó por el modelo exacto presentado en (Vujevicet al, 2009), Ecuación (16), el cual considera las funciones de Bessel ordinarias. La elección de dicho modelo radica en que estas últimas funciones no se definen como series infinitas en sus expansiones asintóticas al infinito y porque la magnitud de la impedancia interna obtenida mediante este modelo es igual a la calculada por el modelo con funciones de Bessel modificadas. Se debe mencionar que los valores reales de impedancia interna que proporcionan ambos modelos son iguales, sin embargo, los valores imaginarios no corresponden entre sí debido a que tienen la misma magnitud, pero con un ángulo de 180° entre los valores que proporciona un modelo y otro.

Es bien conocido y ampliamente utilizado el modelo clásico de impedancia interna por unidad de longitud de un conductor cilíndrico sólido, el cual toma en cuenta el efecto piel y se expresa por medio de las funciones de Bessel ordinarias de orden cero y uno (Vujevicet al, 2009). Este modelo es dado por la siguiente expresión,

$$Z_{c,J} = \frac{\rho\gamma J_0(\gamma a)}{2\pi a J_1(\gamma a)} \quad (19.16)$$

donde J_0 y J_1 es la función de Bessel ordinaria de orden cero y uno, respectivamente, las cuales son las soluciones de la ecuación de Bessel.

Entonces en la Ecuación (16) se evalúan las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel ordinarias para argumentos pequeños y para argumentos muy grandes en los órdenes enteros no negativos 0 y 1, con el fin de conocer el comportamiento asintótico de (16).

Las expansiones asintóticas de las funciones de Bessel con α no negativos para argumentos pequeños $0 < x \ll (\alpha + 1)^{1/2}$ y argumentos grandes $x \gg |\alpha^2 - 1/4|$ son dadas, en forma respectiva, como sigue (Bowman, 2003),

$$J_{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \quad (19.17)$$

$$J_{\alpha}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19.18)$$

Al evaluar la expansión asintótica para argumentos pequeños de las funciones de Bessel de orden cero ($\alpha = 0$) se tiene,

$$J_0(x) = \frac{1}{\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1} = 1 \quad (19.19)$$

Mientras que la evaluación de dicha expansión asintótica para orden 1 o $\alpha = 1$ es obtenida como sigue,

$$J_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^1 = \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{x}{2}\right)^1 = \frac{1}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^1 = \frac{x}{2} \quad (19.20)$$

Los resultados de las Ecuaciones (19) y (20), considerando que $x = \alpha\gamma$, se sustituyen en (16) para determinar una expresión correspondiente a la expansión asintótica para argumentos pequeños del modelo de impedancia interna.

$$Z_{c.cd} = \frac{\rho}{\pi a^2} \quad (19.21)$$

La ecuación anterior modela el comportamiento de la impedancia interna por unidad de longitud de conductores cilíndricos sólidos para valores bajos de frecuencia, la cual también es llamada resistencia de corriente directa.

De manera similar, se determinan las expansiones asintóticas al infinito de las funciones de Bessel de orden cero y uno para obtener una expresión de impedancia interna para altas frecuencias. La expansión asintótica para argumentos grandes de la función de Bessel de orden cero ($\alpha = 0$) es,

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(0)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19.22)$$

La identidad $J'_0(x) = dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$, (Bowman, 2003), se utiliza para determinar la expansión asintótica al infinito de la función de Bessel de orden uno. Entonces, para determinar esta función se obtiene el negativo de la derivada de $J_0(x)$ con respecto a su argumento y se obtiene la siguiente expresión.

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (19.23)$$

Los resultados de las Ecuaciones (22) y (23), considerando que $x = \alpha\gamma$, se sustituyen en (16) para determinar una expresión correspondiente a la expansión asintótica para argumentos muy grandes del modelo de impedancia interna.

$$Z_{c,ca} = \frac{\rho\gamma}{2\pi a} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\gamma}} \cos\left(a\gamma - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\gamma}} \left[\sin\left(a\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2a\gamma} \cos\left(a\gamma - \frac{\pi}{4}\right) \right]} \quad (19.24)$$

En la última ecuación el término $1/2a\gamma$ tiende a infinito para valores muy grandes de frecuencia debido a que la constante de propagación es dependiente de la misma. Con ello y simplificando la Ecuación (24) se reescribe como sigue,

$$Z_{c,ca} = \frac{\rho\gamma}{2\pi a} \cot\left(a\gamma - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19.25)$$

La Ecuación (25) modela el comportamiento de la impedancia interna por unidad de longitud de conductores cilíndricos sólidos para valores altos de frecuencia.

Las expresiones (21) y (25) se suman entre sí para obtener el modelo aproximado de la impedancia interna para todo el rango posible de frecuencias, el cual es dado por la Ecuación (26).

$$Z_c = \frac{\rho}{\pi a^2} + \frac{\rho\gamma}{2\pi a} \cot\left(a\gamma - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19.26)$$

La ecuación anterior aún no es un modelo aproximado de impedancia interna aceptable, ya que presenta un valor de error considerable. Por lo que, una mejor aproximación es dada como,

$$Z_c = k_1 \frac{\rho}{\pi a^2} + k_2 \frac{\rho\gamma}{2\pi a} \cot\left(k_3 \frac{\pi}{4} a\gamma\right) \quad (19.27)$$

Las constantes k_1 , k_2 y k_3 se determinan expandiendo en series de Taylor en $x = 0$ el modelo exacto y el modelo aproximado propuesto. La expansión en series de Taylor de ambos modelos se obtiene utilizando WolframAlpha[®] y en las ecuaciones se considera que $a\gamma = x$.

Las expansiones en series de Taylor del modelo exacto y del modelo aproximado propuesto son dadas por las Ecuaciones (28) y (29), respectivamente.

$$Z_{c,J} = \frac{\rho\gamma}{2\pi a} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} = \frac{\rho}{\pi a^2} \left(1 - \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + O(x^6) \right) \quad (19.28)$$

$$Z_c = \frac{\rho}{\pi a^2} \left[k_1 + k_2 \frac{x}{2} \cot\left(\frac{\pi k_3}{4} x\right) \right] = \frac{\rho}{\pi a^2} \left[k_1 + \frac{2k_2}{\pi k_3} - \frac{\pi k_2 k_3}{24} x^2 - \frac{\pi^3 k_2 k_3^3}{5760} x^4 + O(x^6) \right] \quad (19.29)$$

De las expresiones anteriores se relacionan los términos comunes para obtener un sistema de tres ecuaciones, por medio del cual se determinan las constantes del modelo aproximado propuesto.

$$1 = k_1 + \frac{2k_2}{\pi k_3}, \quad \frac{1}{8} = \frac{\pi k_2 k_3}{24}, \quad \frac{1}{192} = \frac{\pi^3 k_2 k_3^3}{5760} \quad (19.30)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior, las constantes resultan en los siguientes valores: $k_1 = 0.4$, $k_2 = 0.94868329$, $k_3 = 1.00658424$. De esta manera, el modelo aproximado de impedancia interna propuesto, Ecuación (27), tiene un error relativo aceptable respecto a los modelos exactos de impedancia interna dados por las Ecuaciones (15) y (16). La confiabilidad de este modelo aproximado se demuestra mediante un caso de estudio en la siguiente sección.

19.2 Resultados y discusión

La evaluación del modelo aproximado de impedancia interna, dado por la Ecuación (27), se efectúa por medio de la comparación entre los valores de impedancia interna obtenidos por este modelo y el determinado por el modelo exacto representado por (16). Para este caso, resulta indistinto utilizar cualquiera de los modelos exactos, ya que mediante ambos modelos se obtienen los mismos valores de magnitud de impedancia interna.

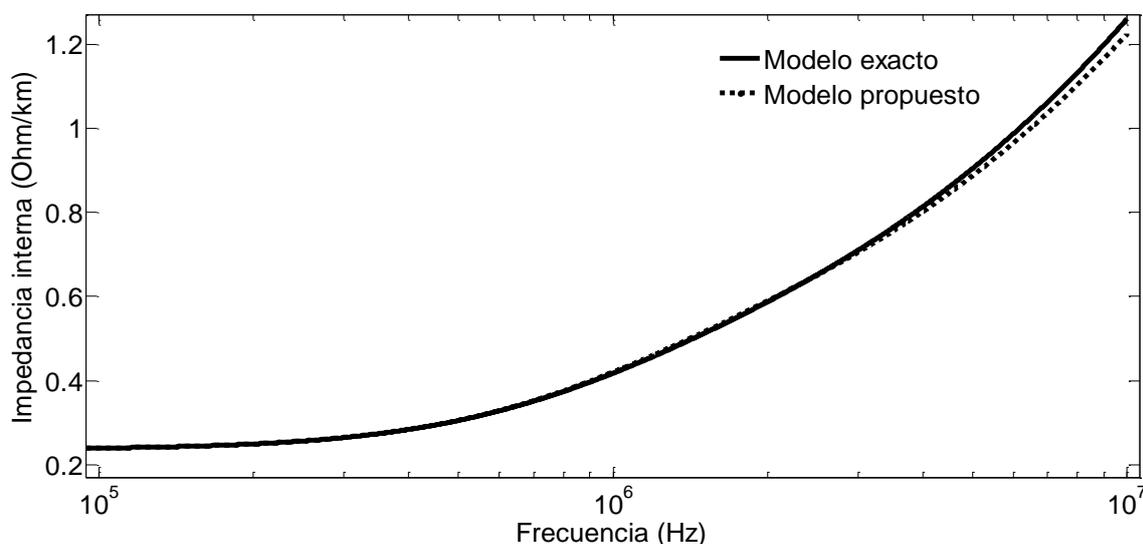
Además, como parte de la evaluación se determina el error relativo que presenta el modelo aproximado en función de la frecuencia. Para llevar a cabo la comparación y determinar el error relativo, se emplearon los datos referentes a las características eléctricas y dimensionales del conductor ACSR 636-MCM, conocido también como Grosbeak, el cual tiene una resistividad de $0.0885 \Omega/\text{km}$ y un radio de 10.921 mm (FENOSA, 2004).

La primera Figura muestra una comparación gráfica entre los valores de la magnitud de la impedancia interna en función de la frecuencia, la cual es obtenida por medio del modelo aproximado y del modelo exacto que utiliza las funciones de Bessel ordinarias.

El rango de frecuencia en el cual se evaluó la magnitud de la impedancia interna de ambos modelos fue de 0 a 10 MHz, aunque en la figura solo se muestra una ventana en un rango de frecuencia de 100 kHz a 10 MHz, esto con el fin de observar con mejor detalle la diferencia entre ambos modelos.

De la evaluación se verifica que el modelo aproximado de impedancia interna presenta un comportamiento muy similar al modelo exacto hasta poco antes de 2 kHz, sin embargo, existe una discrepancia entre ambos modelos en el rango de frecuencia aproximado de 1 a 2 MHz, la cual después disminuye hasta desaparecer y posteriormente vuelve a crecer con el aumento del valor de la frecuencia eléctrica. Esto se aprecia mejor con el comportamiento del error relativo de la Figura subsiguiente.

Figura 19 Magnitud de la impedancia interna en función de la frecuencia obtenida por medio del modelo exacto y aproximado



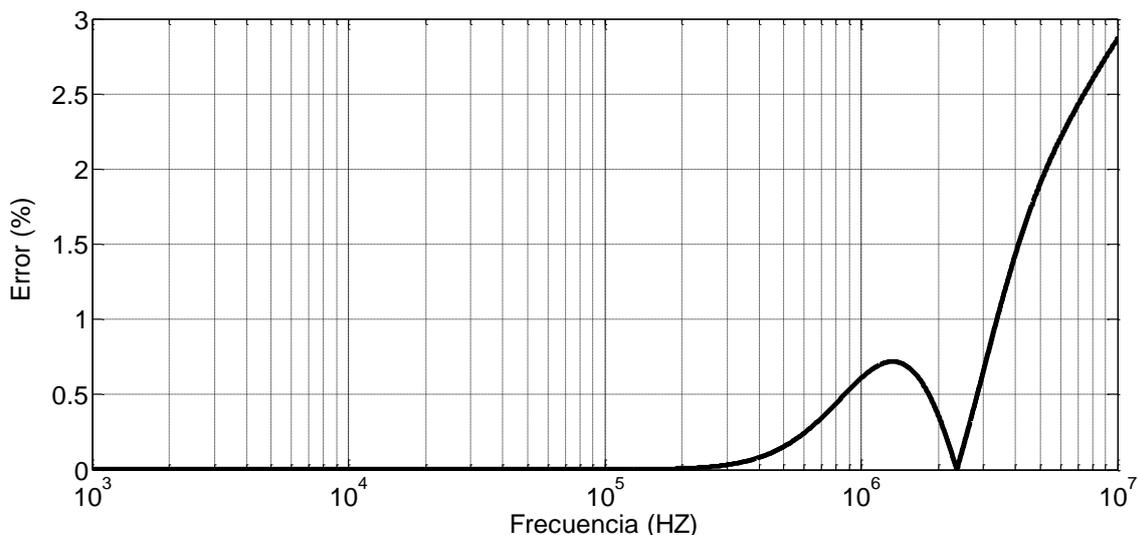
El error relativo del modelo aproximado de impedancia interna propuesto fue determinado de acuerdo a (Chapra y Canale, 2007), donde dicho error es obtenido de la siguiente manera.

$$Error = \frac{|Z_e - Z_a|}{Z_e} \times 100\% \quad (19.31)$$

En esta ecuación los términos Z_e y Z_a corresponden a la impedancia obtenida por medio el modelo exacto y aproximado, respectivamente. Estos valores son dependientes de la frecuencia, por lo que el error relativo también es una función de esta variable.

La Figura 2 presenta la curva del error relativo en función de la frecuencia del modelo aproximado de impedancia interna con respecto al modelo exacto dado por (16). Esta gráfica muestra que el error del modelo aproximado para frecuencias menores de 2 kHz es casi cero, pero después de este valor de frecuencia, dicho error comienza a crecer hasta alcanzar un pico de 0.7198% y posteriormente disminuye hasta cero en una frecuencia aproximada de 2.36 MHz. En la gráfica también se observa que el modelo propuesto presenta un error menor a 1% en el rango de frecuencia de 0-3.88 MHz.

Es importante mencionar que este error no es muy significativo en aplicaciones prácticas de este tipo de modelos, por lo que se puede decir que el modelo tiene un excelente comportamiento hasta este valor de frecuencia.

Figura 19.1 Error relativo del modelo aproximado de impedancia

Se debe notar que un aumento en la separación o discrepancia entre las curvas de la Figura 1, se traduce en un aumento del error relativo. Es por ello que al aumentar la separación de las curvas de la impedancia interna de la Figura 1, después de 2.36 MHz, también comienza un aumento en el error relativo mostrado en la Figura 2. Para este caso de estudio se obtuvo un error relativo máximo de 2.8660% considerando un rango de frecuencias de 0 a 10 MHz. Es claro que el aumento del valor de la frecuencia eléctrica trae consigo un aumento del valor del error relativo del modelo propuesto, por lo que para obtener un error aceptable ($\text{Error} < 3\%$), se recomienda utilizar este modelo hasta un valor máximo de frecuencia de 11 MHz.

19.3 Conclusiones

El desarrollo y propuesta de un modelo aproximado para el cálculo de la impedancia interna por unidad de longitud de conductores cilíndricos sólidos se ha presentado. El desarrollo del modelo se llevó a cabo considerando un enfoque plenamente matemático, pero dicho desarrollo fue presentado en forma sencilla, clara y fácil de comprender.

El modelo aproximado propuesto presentó un buen comportamiento respecto al cálculo de la magnitud de la impedancia interna en función de la frecuencia, ya que proporciona valores con un error menor a 1% hasta frecuencias de 3.88 MHz, sin embargo, después de este valor de frecuencia el error comienza a crecer, por lo que se recomienda utilizar el modelo en aplicaciones prácticas en las cuales la frecuencia eléctrica sea menor a 11 MHz, ya que con ello se tendrá un error menor a 3% en el cálculo de la impedancia interna y no se verá afectada la precisión de los cálculos. En aquellas aplicaciones donde se permita un margen de error mayor, será posible utilizar el modelo en un rango de frecuencias más amplio.

Referencias

Amos, D. E. (1985). *A subroutine package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order*. SAND85-1018. Albuquerque: Sandia National Laboratories.

Amos, D. E. (1986). Algorithm 644: A portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 12(3), 265-273.

Arfken, G. B. & Weber, H. J. (2012). *Mathematical Methods for Physicists*. San Diego: Academic Press.

Arrillaga, J., Smith, B. C., Watson, N. R. & Wood, A. R. (1997). *Power System Harmonic Analysis*. Chichester: John Wiley & Sons.

Bowman, F. (1958). *Introduction to Bessel Functions*. Nueva York: Dover Publicaciones Inc.

Chapra, S. C. & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. Cd. de México: MacGraw-Hill.

Dawalibi, F. P. & Southey, R. D. (1989). Analysis of electrical interference from power lines to gas pipelines-Part I: Computation methods. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(3), 1840-1846.

Dommel, H. W. (1992). *EMTP Theory Book*. Vancouver: Microtran Power System Analysis Corporation.

Johnson, W. & Gram, M. (2003). *High-Speed signal propagation: advanced black magic*. Upper Saddle River-Bergen: PrenticeHall.

Knight, D. W. (2010). *Practical continuous functions and formulae for the internal impedance of cylindrical conductors*. Recuperado de <http://www.g3ynh.info/zdocs/comps/Zint.pdf>

Lovric, D., Boras, V. & Vujevic, S. (2011). Accuracy of Approximate Formulas for Internal Impedance of Tubular Cylindrical Conductors for Large Parameters. *Progress in Electromagnetics Research M*, 16, 171-184.

Moore, J. & Pizer, R. (1984). *Moment Methods in Electromagnetics-Techniques and Applications*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Nahman, N. S. & Holt, D. R. (1972). Transient analysis of coaxial cables using the skin effect approximation $A + B \sqrt{s}$. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(5), 443-451.

Sadiku, O. (2003). *Elementos de Electromagnetismo*. Cd. de México: Alfaomega.

Sarajcev, P., & Vujevic, S. (2009). Grounding grid analysis: Historical background and classification of methods. *International Review of Electrical Engineering*, 4(4), 670-683.

Stratton, J. A. (2007). *Electromagnetic Theory*. Piscataway: Wiley-IEEE Press.

Unión FENOSA Internacional. (2004). *Especificación Técnica de Conductores Desnudos de Aluminio con Alma de Acero (ACSR)*. Barcelona: España, Recuperado de http://www.electricaribe.com/servlet/ficheros/1297134204792/Conductores_desnudos.

Vujevic, S., Boras, V. & Sarajcev, P. (2009). A novel algorithm for internal impedance computation of solid and tubular cylindrical conductors. *International Review of Electrical Engineering*, 4(6), 1418-1425.

Wang, Y. J. & Liu, S. J. (2001). A review of methods for calculation of frequency-dependent impedance of overhead power transmission lines. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, 25(6), 329-338.

Wedepohl, L. M. & Wilcox, D. J. (1973). Transient análisis of underground power transmission systems: System-model and wave propagation characteristics. *IEEE Proceedings on Generation, Transmission and Distribution*, 20(2), 253-260.